Revista Digital Universitaria
10 de dciembre 2004 • Volumen 5 Número 11 • ISSN: 1067-6079

KANT, LA GEOMETRÍA Y EL ESPACIO

Carlos Alvarez J.
Depto. de Matemáticas,
Facultad de Ciencias, UNAM
alvarji@servidor.unam.mx

RESUMEN

Dos son las posiciones que tradicionalmente resumen la visión de Kant sobre la geometría: que las proposiciones geométricas son juicios sintétios *a priori* y que éstas se constituyen a la vez sobre una intuición , necesaria y *a priori*, que es la inuición del espacio. La relación entre estas dos afirmaciones se analiza a la luz de la geometría euclidiana, la que es claramente el punto de referencia de Kant, como de las geometrías no euclidianas, lo que nos permite concluir que no es un espacio euclidiano la condición necesaria para que las proposiciones de esa ciencia sean sintéticas *a priori*.

Palabras Clave: geometría, espacio, juicios sintéticos *a priori*, intuición, demostración

SOME COMMENTARIES ON KANT AND GEOMETRY

ABSTRACT

There are two points fo view whish have been traditionally attached to Kantian vision on geometry: that geometric propositions can be considered as synthetic *a priori* judgements and that these propositions are possible since they lie over an *a priori* and necesary intuition: space intuition. The relation between these two statements is analyzed in light of euclidean and non euclidean geometries, the former being the only one considered by Kant, in order to conclude that euclidean space is not a necessary condition for geometric propositioons to be synthetic *a priori*.

Keywords: geometry, space, synthetic *a priori* judgements, intuition, proof.

10 de diciembre 2004 • Volumen 5 Número 11 • ISSN: 1067-6079

LA VISIÓN DE LA GEOMETRÍA EN EL MARCO DE LA FILOSOFÍA PRECRÍTICA

A lo largo de su obra las reflexiones y comentarios de Kant acerca de las matemáticas son numerosos. Parece por ello pertinente intentar presentar una visión global ya que, por otro lado, es preciso decir que en ningún caso se trata de comentarios que pueden ser dejados de lado. Podemos decir, sin temer caer en un abuso, que cuando Kant hace referencia a las matemáticas (ya sea a la aritmética o la geometría) es porque, a partir de ese comentario o punto de vista, busca sostener una posición que para el conjunto general de su filosofía constituye un punto central. Creemos por lo tanto que los comentarios de Kant sobre las matemáticas no son nunca comentarios marginales.

Si nos limitamos por razones de espacio únicamente a las reflexiones de Kant acerca de la geometría y dejamos de lado sus comentarios sobre la aritmética, nos encontramos con un primer texto que data de 1768, un texto de juventud llamado *Del Primer Fundamento de la Diferencia de las Regiones del Espacio*, y en el que su interés por la geometría deriva de su intención de demostrar la naturaleza absoluta –e independiente de toda materia– del espacio. Su argumento central para sostener esta tesis, a pesar de su clara inspiración newtoniana, no debe partir de la ciencia del movimiento sino de la geometría. Es importante subrayar este hecho que al mismo tiempo nos invita a reflexionar acerca del conocimiento que de las matemáticas y la geometría tiene Kant al momento de escribir este breve tratado.

Si bien nos parece claro su conocimiento de la obra filosófica de Descartes, no es posible asegurar que Kant estuviera familiarizado con la *Géométrie* de 1637. Por otro lado, a partir de este texto de 1768 es posible asegurar que Kant conocía el texto de Leonard Euler sobre el espacio y el tiempo publicado en 1750, pero no existe indicio alguno de que conociera el resto de su obra geométrica.[1] Sin embargo, podemos señalar con cierta seguridad, a partir de lo que él mismo deja ver, que Kant está familiarizado con algunos aspectos de la obra matemática de Leibniz, así como con la obra de A. Kästner.[2] Si bien la influencia de ambos nos parece clara en el ensayo de 1768, merece una atención especial la relación que Kant establece con el pensamiento de Leibniz. A pesar de que su objetivo central en este texto es mostrar la realidad del espacio absoluto, y de este modo hacer patente su filiación newtoniana frente a la posición de Leibniz, su argumento se limita a hacer tan sólo algunas alusiones indirectas a la obra de Newton –a través del texto de Euler anteriormente citado– y declara de manera explícita que la prueba que busca acerca del carácter absoluto del espacio se puede obtener llevando a cabo la valoración filosófica de lo que Leibniz intentó realizar matemáticamente bajo el proyecto del Analysis situs. Mientras que los argumentos presentados por Euler aseguran que sin la hipótesis de un espacio absoluto no son posibles los principios de la ciencia del movimiento, ciencia que él considera tan sólidamente fundada que no es posible dudar de su verdad, Kant toma como punto de partida la idea de construir un argumento geométrico capaz de mostrar la existencia del espacio absoluto:

> …La prueba que yo busco aquí debe poner en manos, no sólo de los mecánicos como intentaba el señor Euler, sino incluso de los geómetras, una razón convincente para que puedan afirmar la realidad de su espacio absoluto con la evidencia a que están acostumbrados.[3]

---

[1] El texto de Euler de 1750 *Reflexions sur l'espace et le temps* es citado por Kant también en su *Ensayo para Introducir en Filosofía el Concepto de Magnitud Negativa* de 1763. Otro texto de Euler, *Elementa doctrinae solidorum. Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita* que data de 1758 no parece ser conocido por Kant.

[2] En este texto sobre las regiones del espacio Kant hace una clara alusión a la *Characterística Geometrica, así como a Die Analisis Geometrica propria und den Calculus situs de Leibniz. De Kästner* conoce sin duda su Anfangsgründe der *Arithmetik, Geometrie, ebenen un sphärischen Trigonometrie, und der Perspektiv*, publicado en 1758, texto citado en la introducción de su ensayo sobre las magnitudes negativas de 1763.

[3] I. Kant, *Regiones*, §I.

Para Kant el análisis de la posición o situación de las partes componentes de los cuerpos y las figuras–análisis que deja de lado toda consideración respecto de su magnitud–, no puede dar cuenta cabal de la *forma* corpórea a menos que, para ello, haga referencias a un espacio absoluto, que por consiguiente tiene que tomar como previamente existente. El orden en el que las partes de un cuerpo se presentan sólo puede ser determinado unívocamente a través del establecimiento de un sistema de referencia y de un observador que pueda localizarlas con relación a este sistema; sin embargo tanto el sistema de referencia como el observador adquieren esta función sólo a partir del espacio absoluto y real en el que se encuentran contenidos junto con el cuerpo descrito. Esta dependencia de la *forma* respecto del espacio, que deviene a su vez una prueba de la naturaleza absoluta del espacio, se manifiesta claramente al tomar en cuenta la existencia de las *parejas incongruentes*, de las que el ejemplo más inmediato es el de la mano derecha y la mano izquierda. En efecto es la existencia de los cuerpos que son idénticos en cada una de sus partes y que sin embargo no pueden coincidir si se superpone uno a otro, quien le permite afirmar la naturaleza de un espacio que no puede ser simplemente el conjunto de relaciones externas de las partes de la materia, como lo aseguraba el propio Leibniz, ya que en ese caso la existencia de una de las dos manos agotaría todo el espacio que a partir de ella se define, haciendo imposible la existencia de la otra, toda vez que de acuerdo con esta concepción, ambas determinarían el mismo espacio y deberían, por lo tanto, coincidir plenamente.

Dos años después, en *De Mundi Sensibilis atque Intelligibilis Forma et Principiis, Dissertatio* de 1770 Kant vuelve a tratar con cierto cuidado el problema del espacio; este texto, considerado como un punto de inflexión en la obra de Kant, marca el fin del período precrítico y anuncia la apertura del horizonte problemático característico de la filosofía crítica. La investigación sobre los principios del mundo sensible y del mundo inteligible, tema de esta *Dissertatio*, proporciona, mediante el establecimiento de los principios formales de ambos, el fundamento de lo que será más adelante la *Estética Trascendental*. Mientras que la *sensibilidad* es concebida como una capacidad receptiva del sujeto ante la presencia de los objetos, la *inteligencia* es concebida como la facultad del sujeto de representarse aquello que por su naturaleza no se presenta a los sentidos. De este modo, el conocimiento sometido a las leyes de la sensibilidad es un conocimiento sensible, mientras que aquél sometido a la inteligencia es un conocimiento intelectual o racional. Bajo el primero se tiene una representación de las cosas tal y como ellas aparecen, bajo el segundo una representación tal y como ellas son.[4]

Es en esta doble tarea de establecer los principios formales del conocimiento sensible y del conocimiento inteligible que Kant regresa nuevamente a una reflexión acerca del espacio ya que éste aparece (junto con el tiempo) como principio formal del mundo sensible que sustenta el vínculo por medio del cual las sustancias y sus estados se ligan en tanto que objetos de la sensibilidad. El conocimiento sensible se basa en la percepción que de las cosas externas se tiene. Dicha percepción se despliega en el espacio, aunque ello no significa la existencia de un espacio para cada percepción de las cosas sensibles ya que bajo la multiplicidad de regiones espaciales no hay sino secciones diferentes de un espacio *único*.

Con base en este doble carácter del espacio, su unicidad y el hecho de ser la forma fundamental de toda sensación, Kant concluye que el espacio es una *intuición pura*, anterior y condición de posibilidad de toda sensación y de toda experiencia. Esta intuición puede ser captada fácilmente a través de los axiomas de la geometría y de las construcciones (mentales) de los postulados, aunque ninguno de ellos es deducible de algún principio o noción universal acerca del espacio y más bien se trata de proposiciones que en él mismo se pueden discernir y *ver*.[5]

---

[4] *Dissertatio*, sección II, §4.

[5] Kant señala, a manera de ejemplos los siguientes axiomas:
1. El espacio no tiene más de tres dimensiones.
2. Entre dos puntos existe una única recta.
3. Por un punto en un plano es posible trazar un círculo con una recta dada.

Es importante señalar que la última proposición corresponde al postulado III de los *Elementos* de Euclides, mientras que la segunda corresponde a una versión modificada del postulado I y la primera no corresponde a ningún Postulado o Noción Común. Si bien Kant los enuncia como axiomas de la geometría (euclidiana), nos parece claro que la referencia de Kant no es extraída directamente del texto euclidiano.

10 de diciembre 2004 • Volumen 5 Número 11 • ISSN: 1067-6079

Para Kant, la geometría no procede concibiendo a sus objetos a través de conceptos universales, sino que los coloca ante los ojos mediante una intuición singular, como sucede con los objetos sensibles. Además de los axiomas algunas otras relaciones entre las figuras en el espacio tienen esta doble propiedad de no ser lógicamente deducibles y de ser igualmente *evidentes*. Un ejemplo claro lo constituye la propiedad que permite la distinción entre dos figuras iguales y dos que no lo son a pesar de coincidir en cada una de sus partes. Por un lado la relación de igualdad en las figuras se deriva de la posibilidad de que coincidan cuando una de ellas se superpone a la otra. Si bien es claro que para la geometría plana dicha coincidencia se puede deducir a partir de la coincidencia de algunas de sus partes, en el caso de la geometría sólida esta situación no necesariamente se cumple. Este es el caso de la relación entre los sólidos similares pero incongruentes (*solidis perfecte similibus atque aequalibus, sed discongruentibus*), ya que sólo con base en la coincidencia plena es posible garantizar su igualdad, pero dicha coincidencia plena, o la ausencia de ella, de donde deriva la desigualdad, se concluye de un principio que se apoya a su vez en una intuición:

> *…No es sino a través de una intuición que se puede caracterizar la diversidad, a saber la de la imposibilidad de la coincidencia. De ahí que la geometría use principios que no son solamente indudables y discursivos, sino que caen bajo la mirada de la mente.*[6]

Nada de lo que se pueda enunciar discursivamente permitiría establecer la distinción entre ellas, ya que ésta es precisamente su característica primordial: son indistinguibles en cada una de sus partes; la diferencia interna que hace imposible la congruencia entre ellas sólo puede ser captada a través de la intuición.

LA GEOMETRÍA EN EL MARCO DE LA FILOSOFÍA CRÍTICA

Es en la *Crítica de la Razón Pura* en donde Kant presenta su visión más amplia, y en cierto modo la más conocida, sobre la naturaleza del espacio y del conocimiento geométrico. El problema general planteado en este texto es, como se sabe, el de establecer bajo qué condición la metafísica puede devenir una ciencia. Parte de la estrategia de Kant para encontrar el camino para una respuesta a este problema se deriva de la respuesta que a su vez se puede dar a la pregunta acerca de cómo es que la matemática es una ciencia pura. En la terminología propia de la filosofía crítica esta pregunta se formula de la siguiente manera: ¿cómo son posibles los juicios sintéticos a priori en matemáticas?

Para Kant el carácter sintético de las proposiciones matemáticas se debe a que no se trata simplemente de juicios que derivan analíticamente las propiedades ya contenidas en los conceptos, y el carácter *a priori* supone su no dependencia de ninguna experiencia particular, lo que les otorga la condición de ser universales. Las proposiciones geométricas pueden derivarse ya sea de conceptos o de intuiciones, los que están dados ya sea de manera *a priori o a posteriori*. Pero Kant asegura primero que tanto los conceptos como las intuiciones dados empíricamente no pueden sustentar la condición universal y apodíctica que es característica de las proposiciones geométricas; por otro lado asegura también que las proposiciones que pueden derivarse de los conceptos que están dados de manera *a priori* sólo pueden ser analíticas y no constituyen por lo tanto un conocimiento sintético. De este modo las proposiciones geométricas sólo son posibles si además de los conceptos tiene lugar una construcción en la intuición, lo que equivale a decir que un objeto es dado de manera *a priori* en la intuición sobre la cual se sustenta el carácter sintético de la proposición. De otra manera, si el objeto no fuese dado en la intuición que lo hace posible –intuición que se presenta así como una facultad del sujeto– sino que fuese algo en sí mismo, no sería posible garantizar que lo que en nosotros hace posible la construcción del objeto corresponde a lo que éste es.

[6] …sed sub obtutum mentis cadentibus. Kant I. Dissertatio, sección III, §15.

Así el conocimiento geométrico requiere, como condición de posibilidad para su existencia, de una intuición pura en la que sea posible la construcción de sus conceptos. La respuesta a la pregunta inicial es así la respuesta acerca de cuál es esta intuición pura sobre la que la matemática construye sus conceptos. Esta intuición no es otra, en el caso de la geometría, que la intuición del espacio, que se presenta como una condición para la posible representación de los objetos. El espacio es la intuición pura sobre la que la geometría funda todos sus conocimientos y sus juicios; ésta es en particular la condición de posibilidad de que las construcciones geométricas puedan ser consideradas como apodícticas y necesarias, aún si han sido efectuadas a través de un objeto particular presente en la sensibilidad.

SOBRE LA PRUEBA DE LA IGUALDAD Y LA DESIGUALDAD DE LAS FIGURAS

Si bien es ampliamente conocida la visión de Kant que aquí hemos resumido, resulta interesante preguntarnos acerca de la consistencia de esta visión, o bien si es que las dos condiciones que aquí se han presentado, el carácter sintético *a priori* de las proposiciones geométricas y el que éstas se sustenten en una intuición que no es otra sino la intuición de espacio, constituyen en el fondo una unidad indisociable. Al interior de la filosofía de Kant la respuesta es clara, toda la explicación dada a lo largo de la *Crítica de la Razón Pura* sostiene que las dos condiciones se siguen de manera necesaria y juntas constituyen las dos características fundamentales de las proposiciones geométricas.

A fin de analizar con mayor cuidado esta visión sobre las proposiciones geométricas podemos partir de aquellas que establecen la igualdad de dos figuras, nos referimos a las proposiciones que aseguran bajo ciertas condiciones la igualdad de dos triángulos, de dos polígonos o dos círculos. Podemos apreciar primer que en todas ellas la igualdad se deriva, directa o indirectamente, de su coincidencia cuando una de las figuras se aplica sobre la otra. Kant asegura que una proposición que establece de esta manera la igualdad puede ser considerada como una proposición sintética que reposa sobre la intuición inmediata y a priori, pues de otro modo no podría tener el carácter de ser apodícticamente cierta y se trataría únicamente de una proposición empírica.

> Todas las demostraciones de la igualdad plena (*durchgängiger Gleichheit*) de dos figuras dadas (de modo que todas las partes de una pueden ser colocadas en el lugar ocupado por las de la otra) se reduce a su *coincidencia* mutua (*sie einander decken*); lo cual no es sino una proposición sintética que se apoya sobre la intuición inmediata (*unmittelbaren Anschauung*); y esta intuición debe ser dada de manera pura y *a priori*, pues de otro modo esta proposición no podría ser tomada como una proposición apodícticamente cierta y sólo tendría una certeza empírica.[7]

Podemos tomar como ejemplo característico de esta proposición el primer teorema del texto de los *Elementos* de Euclides, el teorema que asegura la igualdad de dos triángulos cuando dos lados y el ángulo que forman en el primer triángulo son iguales a dos lados y el ángulo que forman en el segundo triángulo. Sabemos que la demostración de Euclides consiste simplemente en hacer ver que los dos triángulos coinciden cuando uno de ellos se superpone al otro.

---

[7] Prolegómenos, §12.

10 de diciembre 2004 • Volumen 5 Número 11 • ISSN: 1067-6079

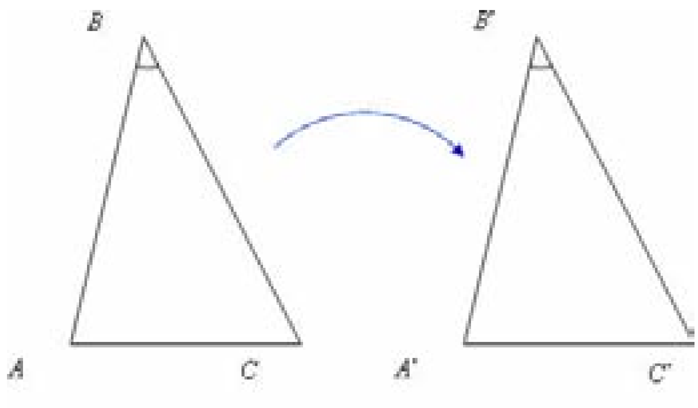


Figura 1

En esta proposición se tiene que con base en la hipótesis de que el lado L[*AB*] es igual al lado L[*A'B'*], el lado L[*BC*] es igual al lado L[*B'C'*] y el ángulo Đ(*ABC*) es igual al ángulo Đ(*A'B'C'*), se puede concluir que los dos triángulos T[*ABC*] y T[*A'B'C'*] son iguales. Como lo señalamos anteriormente, en el texto de Euclides la demostración consiste simplemente en hacer ver la coincidencia de las dos figuras cuando una de ellas se superpone a la otra. Ciertamente podemos asegurar, siguiendo a Kant, que no se trata tan sólo de una proposición cuya certeza dependa simplemente de una experiencia particular (las que deriva de los triángulos aquí presentados) sino que ella descansa sobre una construcción que tiene un carácter *a priori* y es por lo tanto necesariamente sintética. Podemos asegurar por lo tanto, lo que constituye el núcleo de esta proposición, que si bien en el concepto de triángulo se encuentra contenida la condición de que cualesquiera dos de sus lados forman un ángulo, no es posible derivar analíticamente de ello que el triángulo está determinado de manera única, en forma y magnitud, a partir de dos de sus lados y del ángulo que ellos forman.

Pero a partir de esta primera proposición que establece la igualdad entre dos figuras, se plantea necesariamente la pregunta acerca de si en el caso de la geometría del espacio tridimensional puede darse la misma condición. La proposición que establece la relación entre dos figuras que son perfectamente idénticas en cada una de sus partes, sin ninguna diferencia interna, pero que no se pueden encerrar en los mismos límites y que por lo tanto no coinciden cuando una de ellas se aplica sobre la otra, como es el caso de las dos manos ya mencionado por Kant, tiene igualmente el carácter de ser una proposición sintética. La imposibilidad de que el entendimiento pueda dar cuenta de la diferencia interna que impide la congruencia entre los dos objetos, a pesar de la coincidencia en cada una de sus partes internas, es para Kant la prueba clara de que esta propiedad sólo puede ser explicada en el ámbito de la intuición mediante sus relaciones externas en el espacio. Los objetos incongruentes se presentan como intuiciones sensibles, es decir como apariencias, y es bajo esta condición que adquieren ese carácter: no son representaciones de objetos tal y como éstos son en sí mismos y tal y como el entendimiento los podría conocer. La determinación interna de una región del espacio –la región ocupada por la figura– sólo es posible a través de la determinación de su relación externa con todo el espacio –del que ella es una parte–, pero esta doble determinación sólo es posible a su vez a través de la sensibilidad, ya que el espacio es la forma de la intuición externa de la sensibilidad. A través del entendimiento, en cambio, no es posible dar cuenta de la relación de dos figuras simétricas y no congruentes:

> …Ningún concepto es capaz por sí mismo de permitirnos concebir la diferencia entre dos cosas que a pesar de ser semejantes e iguales resultan no congruentes, esto sólo podrá hacerse a través de las relaciones que proceden de la intuición.[8]

[8] *Ibid.* §13.

De este modo Kant señala que tanto en el caso de la igualdad de las figuras planas, como la de desigualdad cuando se trata de figuras sólidas simétricas, es la construcción en la intuición del espacio la que sostiene necesariamente la validez de la proposición. Es ella quien aparece como el sustento del carácter sintético y a priori de la proposición que permite establecer la relación que guardan entre sí las dos figuras.

Un caso similar se tiene con la proposición que asegura que en un triángulo dos lados siempre son mayores que el tercero, la cual adquiere su carácter apodíctico, afirma Kant, del hecho de que ella no se deriva únicamente de un concepto general (el de triángulo) sino de una intuición *a priori* en la que este concepto es puesto. Se trata en este caso de otra conocida proposición de los *Elementos* y la demostración que proporciona el texto euclidiano permite nuevamente corroborar su carácter sintético y *a priori*.

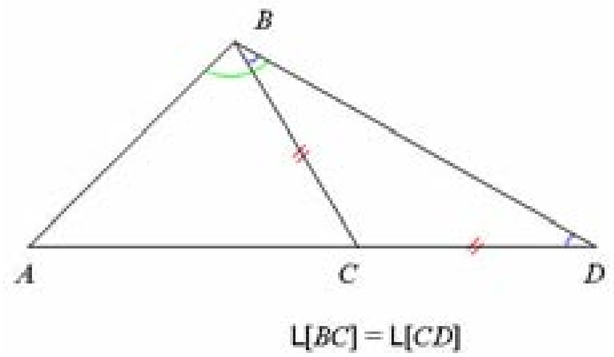


Figura 2

Para demostrar que en el triángulo T[*ABC*] de la figura 2 los lados L[*AC*] y L[*BC*] tomados juntos son mayores que el tercer lado L[*AB*], Euclides procede de la siguiente manera: primero lleva a cabo una *construcción* que consiste en prolongar el lado L[*AC*] de modo que el lado L[*CD*] resulte igual al lado L[*BC*].[9] Enseguida traza el segmento L[*BD*] lo que le permite obtener a su vez el triángulo T[*ABD*]. Se observa entonces que en el triángulo T[*BCD*] dos de sus lados son iguales y por lo tanto lo son también los ángulos que se les oponen. También se observa que el ángulo Đ(*CBD*), que es igual al ángulo Đ(*BDC*), es menor que el ángulo Đ(*ABD*); por lo que se puede asegurar entonces que el lado L[*AB*] es menor que el lado L[*AD*]. Pero este lado L[*AD*] resulta, por construcción, igual a los lados L[*AC*] y L[*BC*], con lo cual queda demostrada la proposición.

En este caso podemos asegura también, siguiendo a Kant, que se trata de una proposición sintética que no se puede derivar analíticamente del concepto de triángulo, y es también claro el papel que la construcción desempeña en esta proposición ya que sin ella no es posible sostener la relación cuantitativa de los lados del triángulo. Podemos señalar dos características interesantes de esta construcción: por un lado podemos notar el hecho de que la igualdad de los lados L[*CD*] y L[*BC*] –junto con la igualdad de los ángulos que se les oponen, los ángulos Đ(*CBD*) y Đ(*CDB*) en el triángulo T[*BCD*]– es una consecuencia directa del trazo realizado: el haber prolongado el lado L[*AC*] de modo que el lado L[*CD*] resulte igual al lado L[*BC*]. Pero junto con ello se debe señalar que la condición que permite concluir el teorema, el que el ángulo Đ(*CBD*) resulte más pequeño, por ser una parte de él, que el ángulo Đ(*ABD*), es una condición que no es una consecuencia directa del trazo realizado sino una condición que se deriva, independientemente de la longitud del lado L[*CD*], como consecuencia de que el primero es una parte del segundo. Es claro que esta demostración puede ser explicada de la siguiente manera: para probar que en el triángulo T[*ABC*] los lados L[*AC*] y L[*BC*] tomados juntos son mayores que el tercer lado L[*AB*], se construye, mediante un trazo auxiliar, el triángulo T[*ABD*] en el que uno de sus lados es L[*AD*] –la suma de los dos lados L[*AC*] y L[*BC*] del triángulo original– y otro lado es L[*AB*]; se trata de hacer ver en este segundo triángulo que el lado L[*AD*] es mayor que

[9] Las condiciones de esta construcción han sido ya justificadas previamente en el texto euclidiano.

10 de diciembre 2004 • Volumen 5 Número 11 • ISSN: 1067-6079

el lado L[*AB*]. La demostración de Euclides nos permite ver que esto se sigue del hecho que al primero de los lados se opone un ángulo que es mayor que aquel que se opone al segundo lado. Es de la relación que guardan en entre sí los ángulos que se puede derivar la relación que tienen entre sí los lados del triángulo.

Es claro que esta afirmación tiene una estrecha vinculación con la primera proposición que hemos comentado, la que hemos explicado a través de la primera figura. La igualdad de los dos triángulos en esta primera figura se deriva del hecho de que el ángulo Ð(*ABC*) es igual al ángulo Ð(*A'B'C'*) y de manera clara esta igualdad es la que permite asegurar la igualdad de los lados L[*AC*] y L[*A'C'*]. Otro modo de ver esta conclusión, y que muestra el vínculo que hemos mencionado, es que si en los triángulos T[*ABC*] y T[*A'B'C'*] los ángulos Ð(*ABC*) y Ð(*A'B'C'*) fuesen distintos, digamos que el primero sea más grande que el segundo, entonces el lado L[*AC*] resultaría mayor que el lado L[*A'C'*]. A ángulos iguales se oponen lados iguales y a ángulos distintos se oponen lados distintos, siendo mayor el lado que se opone al ángulo mayor. Estas conclusiones que permiten vincular las dos proposiciones que hemos comentado muestran claramente, como lo afirma Kant, su carácter sintético ya que ninguna de ellas puede ser contenida en el concepto mismo de triángulo de modo que sea deducida analíticamente de éste: nuevamente en el concepto de triángulo se encuentra contenida la noción de que existen tres lados y tres ángulos que se oponen a los lados, pero que la relación de igualdad o desigualdad de los lados de un triángulo se corresponda, al grado que se puede deducir de ella, de la relación de igualdad o desigualdad entre los ángulos que en el triángulo se les oponen, no es una condición que se pueda derivar analíticamente del concepto de triángulo.

SOBRE LAS PROPOSICIONES QUE SE DERIVAN DEL POSTULADO V

Sin embargo no podemos dejar de señalar un aspecto que nos parece crucial para poder analizar hasta qué punto es posible sostener, junto con Kant, que las características fundamentales de toda proposición geométrica, el hecho de ser sintéticas *a priori* y el hecho de estar sostenidas en una intuición pura del espacio, son en efecto indisociables y hasta qué punto lo son. Si tomamos para ello la proposición que afirma que la suma de los ángulos internos de un triángulo es siempre igual a dos ángulos rectos (lo que en términos comunes significa que es igual a 180 grados) podemos ver que para hacer ver este hecho el texto euclidiano procede de la siguiente manera. En el triángulo T[*ABC*] de la figura 3 se prolonga uno de los lados y se traza una línea paralela a otro de ellos.

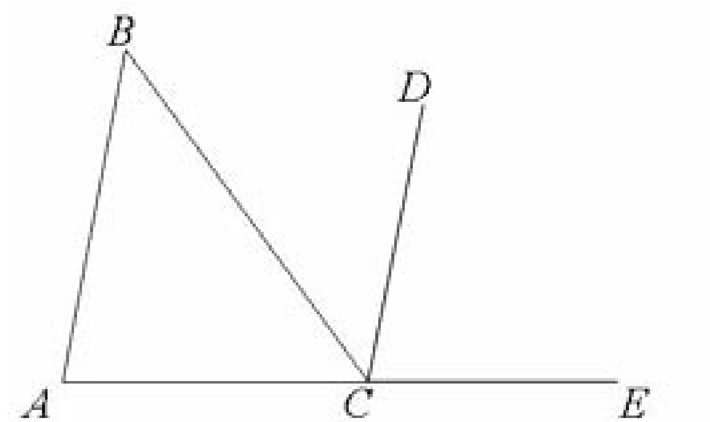


Figura 3

El lado L[*AC*] se prolonga hasta un punto *E* y por el punto *C* se traza la línea L[*CD*] que es paralela a la línea L[*AB*]. En estas condiciones el autor de los *Elementos* puede concluir trivialmente que los ángulos Ð(*ACB*), Ð(*BCD*) y Ð(*DCE*) suman dos ángulos rectos. Pero lo que en realidad constituye la demostración de la proposición es la afirmación de que el ángulo Ð(*BCD*) es igual al ángulo Ð(*ABC*) y que el ángulo Ð(*DCE*) es igual al ángulo Ð(*BAC*). Se debe notar por lo tanto que una condición especial es necesaria para que se puedan concluir estas dos últimas igualdades: Ð(*BCD*) = Ð(*ABC*) y Ð(*DCE*) = Ð(*BAC*), se trata del postulado que asegura que por un punto fuera de una recta sólo existe una única recta paralela a ella.

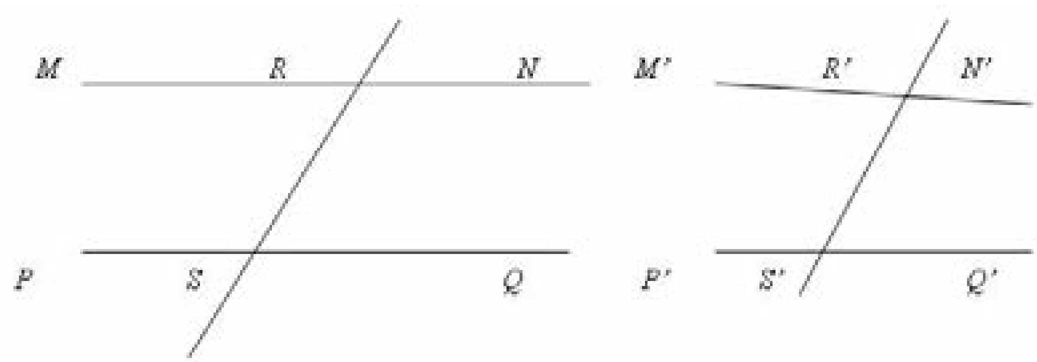
Como sabemos en ese caso se trata de una proposición que además de ser considerada como sintética no es universalmente válida y, más bien, su validez depende del espacio en el que se lleva a cabo la construcción requerida. Para que esta proposición aparezca como apodícticamente verdadera debe referirse a una construcción que se lleva a cabo en un espacio (bidimensional) en el que la relación de paralelismo entre dos rectas sea tal que la propiedad se cumpla. Nos parece necesario subrayar este hecho porque permite comprender un aspecto de la tesis de Kant que debe ser resaltado y que involucra todo lo que se ha dicho acerca de esa intuición *a priori* que es el espacio y su papel en la conformación del carácter sintético y *a priori* de las proposiciones geométricas. Podemos señalar que para que dicha proposición resulte válida es necesario en efecto que sólo una recta, en este caso la recta L[*CD*], se pueda trazar de modo que sea paralela a la recta L[*AB*]. Si por el punto *C*, exterior a la recta L[*AB*] no fuese posible trazar *ninguna* línea recta paralela a ésta, o bien si se pudiesen trazar al menos dos, entonces no sería posible, en ninguno de estos casos alternativos, asegurar las igualdades Ð(*BCD*) = Ð(*ABC*) y Ð(*DCE*) = Ð(*BAC*). De hecho si no existiese ninguna paralela –lo que significa que cualquier recta trazada por el punto C se encontraría necesariamente en algún momento la línea L[*AB*]– se podría concluir el siguiente hecho: si se traza la línea L[*CD*] de manera que Ð(*DCE*) = Ð(*BAC*), entonces el ángulo Ð(*BCD*) resulta ser menor que el ángulo Ð(*ABC*); lo que daría como resultado que la suma de los ángulos del triángulo es *mayor* que dos ángulos rectos.

Por otro lado, si se supone que existen al menos dos rectas paralelas a la recta L[*AB*] que pasan por el punto C, en la misma figura se tendría que si se satisface la igualdad que Ð(*DCE*) = Ð(*BAC*) entonces se tiene que el ángulo Ð(*BCD*) resulta ser *mayor* que el ángulo Ð(*ABC*)¸ por lado si se toma a la línea L[*CD*] de modo que Ð(*BCD*) = Ð(*ABC*) entonces se tiene que el ángulo Ð(*DCE*) es *mayor* que el ángulo Ð(*BAC*). En cualquiera de los dos casos se concluye que la suma de los ángulos internos del triángulo es *menor* que dos ángulos rectos.

Sabemos que la existencia y unicidad de la recta paralela está garantizada en la geometría euclidiana por medio de un postulado, el llamado Postulado V que asegura, en su versión original, que

> Si una línea recta cae sobre dos líneas rectas y forma con ellas ángulos interiores del mismo lado que sean menores que dos ángulos rectos, las dos rectas, si son prolongadas indefinidamente, se encontrarán en ese lado en el que están los dos ángulos que son menores que dos rectos.

Lo que este postulado afirma es que un criterio suficiente para saber si dos rectas se cortan (y por lo tanto para saber que no son paralelas) es que formen ángulos que son menores que dos rectos con una recta transversal que incide sobre ellas. Se este modo si en la siguiente figura los ángulos Ð(N'R'S') y Ð(R'S'Q') son menores que dos rectos entonces sabremos que las líneas L[M'N'] y L[P'Q'] se intersectan en algún punto, siempre que se prolonguen lo suficiente (este es el sentido de la condición de que las rectas sean "prolongadas indefinidamente"). Por otro lado se puede asegurar que si los ángulos Ð(NRS) y Ð(RSQ) son iguales a dos rectos entonces sabremos que las líneas L[MN] y L[PQ] son paralelas.



10 de diciembre 2004 • Volumen 5 Número 11 • ISSN: 1067-6079

Sin embargo este postulado tiene, a diferencia de los cuatro anteriores que le preceden, una característica especial, más que presentarse como una cláusula constructiva como lo es el postulado que aseguran que dados dos puntos se puede trazar la línea recta que los une (Postulado I), o el que asegura que si ha sido dado un punto y un intervalo se puede trazar el círculo cuyo centro es el punto dado y cuyo radio es el intervalo dado (Postulado III), el Postulado V establece una condición especial sobre el espacio en el que se llevan a cabo las construcciones geométricas; de alguna manera este postulado afirma que el espacio geométrico es un espacio "plano".

Hemos visto que el teorema que asegura que la suma de los ángulos internos de un triángulo depende del Postulado V para su demostración; en realidad es posible ver que se trata de una proposición que es *lógicamente equivalente* a él.

La proposición que asegura que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos requiere una condición particular del espacio en el que la geometría se desarrolla; ésto se puede hacer ver con más claridad a partir del siguiente ejemplo, en el que se puede tomar un triángulo esférico para el cual la proposición no se satisface.

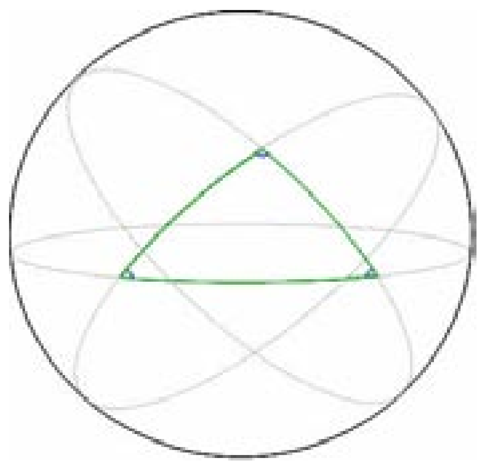


Figura 4

En una geometría desarrollada sobre una esfera, que es un espacio bidimensional que no es *plano*, las líneas rectas no son otra cosa que círculos máximos y de este modo un triángulo está formado por tres de estos círculos máximos.[10] En esta geometría *esférica* no es posible trazar dos líneas que sean paralelas y en consecuencia la suma de los ángulos internos de un triángulo es *mayor* que dos ángulos rectos.

¿Significa esto que el teorema de la geometría al que hemos hecho alusión no es en realidad una proposición sintética y a priori ya que ha perdido al menos ese carácter de ser universal y necesaria? Creemos que podemos considerar que la proposición no ha perdido ninguna de estas características y, por el contrario, ha hecho valer la íntima relación y dependencia de los objetos a los que ella se refiere con el espacio en el que se encuentran. El espacio se presenta en efecto como condición de posibilidad para que la relación se cumpla y la proposición sea verdadera, pero no se trata de el espacio (de dos dimensiones) único que es condición a priori de toda proposición geométrica (y de toda experiencia), sino de *un espacio* (de dos dimensiones) en el que la condición anteriormente enunciada, la unicidad de la recta paralela a una recta dada, se cumple. La necesidad de un espacio como condición sobre la cual se sustenta el carácter sintético y a priori de las proposiciones geométricas no supone, como lo pensaba Kant, que se trata de un espacio *único*.

[10] De hecho podemos asegurar que es este tipo de triángulo el que en realidad se dibuja siempre que se plasma un triángulo sobre un terreno, el terreno y el triángulo se encuentran en realidad sobre un espacio de dos dimensiones que no es "plano" sino "curvo": la superficie de la Tierra.

Otra proposición comentada por Kant a lo largo de la *Crítica de la Razón Pura* nos permite profundizar en este argumento. Kant afirma que una proposición como "dos líneas rectas no pueden encerrar un espacio" o bien la proposición que afirma que "con tres líneas rectas es posible construir una figura" no pueden derivarse analíticamente de los conceptos de línea o de figura. El triángulo es un objeto construido en la *intuición* a partir de un concepto (el de 3 líneas) y es de este modo producto de nuestro conocimiento y no resulta previo a él. Del mismo modo, Kant asegura que el concepto de "biángulo" resulta un concepto vacío que no puede ser construido en la intuición. Si tomamos nuevamente el ejemplo de la geometría esférica vemos que en ella el concepto de biángulo es susceptible de ser construido. Dos líneas en este espacio bidimensional siempre forman una figura, encierran un espacio, y de hecho en esta figura se puede mostrar que los ángulos que las líneas forman son iguales ($\alpha = \beta$); es entonces la inexistencia de líneas paralelas en este espacio bidimensional la condición que permite que dos líneas rectas puedan formar una figura. Dicho de otra manera, si fuese posible encontrar una (o más) líneas paralelas a una línea recta dada que pasen por un punto dado fuera de ésta, entonces en efecto dos líneas no pueden encerrar un espacio (una región del espacio) y un biángulo resulta una figura que no puede ser construida, como lo puede ser siempre un triángulo.

Podemos decir entonces que en este caso las condiciones *intrínsecas* del espacio, y que se manifiestan por la inexistencia, la unicidad o la multiplicidad de las rectas paralelas, resultan determinantes para el tipo de construcciones geométricas que en él son posibles. Sólo en un espacio con una única recta paralela es posible trazar una figura como un cuadrado, sólo en un espacio sin líneas paralelas existe un biángulo y sólo en un espacio con una infinidad de rectas paralelas es posible trazar dos rectas que siendo paralelas no son *equidistantes*.

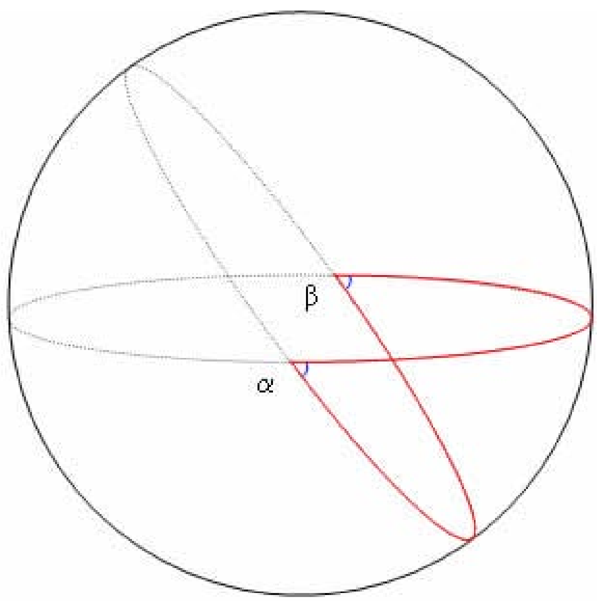


Figura 6

Podemos afirmar entonces, al comparar rápidamente todas las proposiciones geométricas que hemos analizado, que si bien en todas ellas es posible establecer una condición impuesta por el espacio como condición de posibilidad, no se trata necesariamente del mismo espacio ni las condiciones que éste impone se manifiestan del mismo modo. Las primeras proposiciones que analizamos, la que asegura la igualdad de los dos triángulos cuando son iguales dos de sus lados y el ángulo comprendido por ellos, o bien la proposición que asegura que en todo triángulo dos de sus lados son siempre mayores que el tercer lado, son proposiciones que resultan verdaderas en toda geometría, ya sea la que se desarrolla en un espacio en el que existe una única recta paralela a

10 de diciembre 2004 • Volumen 5 Número 11 • ISSN: 1067-6079

una recta dada y que pasa por un punto exterior a ésta, o bien en un espacio en el que sea posible encontrar dos (y de hecho una infinidad) de rectas paralelas, o en un espacio, como el espacio de la geometría esférica, en el que no es posible trazar ninguna recta paralela a la recta dada. Para recuperar la posición de Kant acerca de las proposiciones de la geometría, se puede decir que estos teoremas, que por esa razón podemos llamar teoremas de la *geometría absoluta*, requieren una condición que puede ser dada por *cualquier* espacio. Las proposiciones que hemos señalado en un segundo momento requieren algo que no todo espacio puede proporcionar.

De este modo parece posible concluir que la única posibilidad de que la geometría conserve plenamente las características que Kant había señalado, consiste en aceptar que la geometría es mucho más de lo que el propio Kant parecía dispuesto a reconocer. La insistencia, muchas veces señalada por Kant y por algunos de sus seguidores, en un espacio único y en que sólo una geometría euclidiana podría ser aceptada, rechazando por completo la legitimidad de toda geometría no euclidiana ya sea esférica o hiperbólica, parecería ser consecuente con la visión tantas veces sostenida por él acerca de la naturaleza del espacio y de su papel en el conocimiento geométrico. Pero creemos que más allá de la insistencia en un espacio único como condición a priori del conocimiento geométrico, Kant hizo un señalamiento que curiosamente resulta muy valioso para aquellas geometrías que sus seguidores se resistían a aceptar: no parece posible concebir una geometría que pueda prescindir del espacio en el que ella se desarrolla. Si para Kant la geometría requería como condición de posibilidad la existencia previa del espacio como fuente del conocimiento certero a través de las construcciones que en él son posibles, para nosotros es la existencia de distintas geometrías la que nos permite ver hasta qué punto es justa su posición de que son las condiciones del espacio las que determinan el tipo de geometría que se puede hacer.

BIBLIOGRAFÍA

Bonola, R. *La Geometria non-Euclidea*, 1906. Edición en inglés *Non-Euclidean Geometry*, New Cork, Dover 1955.

Euclides. *Elementa*. L. Heiberg y H. Menge (eds.), Leipzig, Teubner, 1883-1899. Edición en español, Elementos, traducción y comentarios de M. Puertas, Madrid, Gredos, 1991. Edición en inglés, *The Thirteen Books of the Elements*, traducción y comentarios de Thomas Heath, New York, Cambridge University Press, 1908, 1956.

Euler, L. *Reflexions sur l'espace et le temps*. MÉMOIRES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE BERLIN [4], (1748) 1750, pp. 324-333. *Opere Omnia* III,2.

–*Elementa doctrinae solidorum. Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*, NOVI COMMENT. ACAD. SC. IMP. PETROPOL., [4], (1752-3) 1758, pp. 109-140.

Hilbert, D. *Grundlagen der Geometrie*, (2ª. Edición), Leipzig, Teubner, 1903. Edición en inglés, *Foundations of Geometry*, Illinois, Open Court, 1971.

Kant, I. *Versuch, den Begriff der negativen Grössen in die Weltweisheit einzufüren* 1763. Edición en español, Ensayo *para Introducir las Magnitudes Negativas en Filosofía, en Opúsculos de Filosofía Natural*, Madrid, Alianza Editorial, 1992. Edición en francés *Essai pour Introduire en Philosphie le Concept de Grandeur Négative*, París, Vrin, 1980.

–*Von dem ersten Grande des Unterschiedes der Gegenden im Raume*, 1768. Edición en español, *Del Primer Fundamento de la Diferencia de las Regiones del Espacio, en Opúsculos de Filosofía Natural*, Madrid, Alianza Editorial, 1992. Edición en inglés "On the First Ground of the Distinction of Regions in Space" en *Kant's Inaugural Dissertation and Early Writings on Space*, Chicago, Open Court, 1929.

–*De Mundi Sensibilis atque Intelligibilis Forma et Principiis, Dissertatio*, 1770. Edición en inglés *Dissertation on the Form and Principles of the Sensible and Intelligible World en Kant's Inaugural Dissertation and Early Writings on Space*, Chicago, Open Court, 1929. Edición en francés *Dissertation sur la Forme et les Principes du Monde Sensible et du Monde Intelligible*, París, Vrin, 1995.

–*Kritik der reinen Vernunft Zweite hin und wieder verbesserte Auflage* 1787. Edición en español *Crítica de la Razón Pura*, 2ª. Edición, Buenos Aires, Losada, 1973.

–*Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik die als Wissenschaft wird auftreten können* 1783. Edición en español Prolegómenos, Buenos Aires, Aguilar 1975. Edición en inglés *Prolegomena to any Future Metaphysics*, Indianapolis, Bobbs-Merrill, 1950. Edición en francés *Prolégomènes à Toute Métaphysique Future*, París, Vrin 2001.

Legendre, A.M. *Eléments de Géométrie*, avec des notes, 12 ème éd. Paris, Firmin Didot, 1823.
Saccheri G, *Euclides ab omni naevo vindicatus* 1733. Edición en inglés *Euclid freed of all Blemish* New York, Chelsea Publishing Company 1986.

Simson, R. *The Elements of Euclid*, Glasgow, A. and J. Duncan, 1756.