Revista Digital Universitaria
18 de enero 2005 • Volumen 6 Número 1 • ISSN: 1067-6079

# KANT VISTO DESDE LAS MATEMÁTICAS

*Carlos Torres Alcaraz*
*Facultad de Ciencias*
*UNAM*

## RESUMEN

Podemos decir también que la filosofía crítica de Kant surgió en una época en que las matemáticas estaban en el umbral de cambios radicales que, sin embargo, sólo fructificaron después de su muerte. Las geometrías no euclidianas, el álgebra abstracta y la teoría de conjuntos transfinitos de Cantor no se hallaban en aquel momento por ninguna parte, permaneciendo ocultas tras el velo del imprevisible futuro. Fue su aparición lo que renovó el horizonte matemático, produciendo un ajuste en la manera en que tradicionalmente se había entendido esta disciplina.

**Palabras clave:** Geometría, Kant, filosofía, álgebra, matemáticas.

## KANT SEEN FROM THE MATHEMATICS

## ABSTRACT:

We can also say that the critical philosophy of Kant arose at a time at which the mathematics were in the threshold of radical changes that, nevertheless, only fructified after their death. Noneuclidianas geometries, abstract algebra and the transfinitos set theory of Singer were not at that moment by any part, remaining hidden after the veil of the unforseeable future. It was his appearance which renewed the celestial horizon, producing an adjustment in the way in which traditionally this discipline had been understood.

**Keywords:** Geometry, Kant, philosophy, algebra, mathematics.

18 de enero 2005 • Volumen 6 Número 1 • ISSN: 1067-6079

# INTRODUCCIÓN

Kant es quizá el filósofo con mayor influencia en la filosofía de las matemáticas durante el siglo diecinueve y principios del siglo veinte. Las ideas por él vertidas en la *Crítica de la razón pura* fijaron, en gran medida, la agenda de los debates en dicho período. Bolzano, Brouwer, Cantor, Dedekind, Frege, Gauss, Gödel, Hamilton, Helmholtz, Hilbert, Peirce, Poincaré, Riemann y Russell son algunos nombres de matemáticos que podemos citar entre quienes orientaron parte de sus reflexiones bajo la influencia de Kant, ya fuera por aceptar sus ideas, ya fuera por disentir de él.

A doscientos años del fallecimiento de Kant veamos qué fue de su filosofía matemática, pensada para la ciencia del siglo dieciocho, frente a los cambios ocurridos en los siglos subsiguientes.[1] Al respecto no es difícil imaginar lo sucedido: las ideas de Kant fueron rechazadas, modificadas, adaptadas y/o utilizadas de las más diversas maneras. De esta manera Kant se convirtió en: (a) uno de los filósofos a desterrar; (b) una fuente de inspiración; (c) un banco de ideas útiles y (d) un filósofo cuyas propuestas eran parcialmente acertadas y parcialmente erróneas. De cierta manera Kant desapareció, quedando en su lugar una multitud de versiones suyas, una al menos por cada participante en los debates.

En lo que sigue no hablaremos por sí de la postura de Kant frente a las matemáticas; más bien, lo que haremos será recorrer parcialmente su huella en la filosofía de las matemáticas. De la misma manera, no nos ocuparemos de todas las versiones que de Kant nos ha legado el pasado, tema digno de un tratado de dimensiones inimaginables. Será mejor señalar algunos aspectos de su pensamiento que fueron relevantes para la filosofía de las matemáticas, como, por ejemplo, los relativos a la naturaleza de la geometría.[2] Como veremos, la experiencia matemática en los últimos doscientos años ha desafiado la teoría kantiana del conocimiento matemático en aspectos fundamentales. En particular, nos proponemos mostrar: (1) cómo algunos aspectos de la filosofía de Kant se adecuaron a la evolución teórica y conceptual de la matemática moderna, sobre todo dentro del contexto de los programas de fundamentación de finales del siglo diecinueve y principios del siglo veinte, y (2) cómo otros aspectos de la filosofía de Kant fueron simplemente desechados. Esto lo haremos con relación a autores como Brouwer, Cantor, Frege, Gödel y Hilbert (principalmente éste último), contendientes todos ellos en la arena de los fundamentos de las matemáticas, terreno en el que la participación de Kant fue decisiva en el siglo dieciocho.

## *Un poco de geometría*

En gran medida, si la filosofía de Kant sigue presente en nuestros días, ello se debe a dos factores: por una parte, a las cuestiones que toca; por la otra, a las respuestas que ofrece. Se puede estar en desacuerdo con él; lo que no se puede hacer es dejar sin respuesta las preguntas que elabora. Para hacer comprensible la discusión subsiguiente, hagamos un pequeño recuento de algunas ideas de Kant con relación a las matemáticas. Comencemos con un comentario global.
Kant ve en las proposiciones matemáticas verdades necesarias. No obstante, a diferencia de Leibniz, no

[1] Pareciera haber una contradicción entre nuestras afirmaciones: ¿Cómo es posible que una filosofía pensada para una matemática tan distinta a la matemática actual haya tenido tanta importancia en la discusión de los fundamentos de esta última? Al respecto, habremos de precisar en qué sentido Kant ha sido relevante para la filosofía de las matemáticas. Con ello queremos enfrentar la idea de que tras los cambios ocurridos en los dos últimos siglos el pensamiento de Kant no pasa de ser una reliquia filosófica.

[2] Debemos tener en mente que en la época de Kant la creencia en la validez de la geometría euclidiana era universal. Nadie dudaba que si en realidad se pudieran medir los ángulos de un triángulo, el resultado sería necesariamente igual a dos rectos. ¿Qué otra cosa podría ser, sobre todo en una época en la que nadie cuestionaba la necesidad absoluta del sistema euclidiano? De la misma manera, ¿Se podía cuestionar el que las leyes del álgebra fuesen verdaderas sin lugar a dudas? Todas estas creencias se vinieron abajo tras la aparición de las geometrías no euclidianas y el álgebra abstracta en el siglo diecinueve.

ve en ellas proposiciones analíticas, es decir, proposiciones en las que el concepto del predicado *P* está contenido (implícitamente) en el concepto del sujeto *S*. En su opinión, las proposiciones matemáticas no se siguen necesariamente del análisis de los conceptos que figuran en ellas; son, por decirlo con sus propias palabras, juicios sintéticos *a priori*. Al respecto, su preocupación en la *Critica de la razón pura* no es discutir esta tesis, sino explicar cómo es que son posibles tales juicios. Este es uno de los objetivos de la Estética Trascendental, sección con que Kant abre dicha obra.

Lo que explica la necesidad de las proposiciones sintéticas *a priori* de la matemática pura es, según Kant, la relación que guardan con las intuiciones puras o *a priori* del tiempo y el espacio. Tales proposiciones no son juicios empíricos o de experiencia, ni se deducen de ellos. Más bien, las intuiciones que las originan se hallan en nosotros *a priori*, es decir, con anterioridad a toda percepción de objetos y como una condición de posibilidad de tales percepciones. Al mismo tiempo, lo que distingue al conocimiento matemático de cualquier otra forma de conocimiento *a priori* es que procede no mediante el análisis de conceptos, sino mediante la construcción de conceptos en el tiempo y en el espacio.

Este es un punto ampliamente debatido en la literatura, del cuál sólo tocaremos algunos aspectos. Comencemos por aclarar en qué estriba la referida "construcción de conceptos". Ésta, en palabras de Kant, consiste en "presentar la intuición *a priori* que le corresponde [al concepto]". En A 713 y B 741, Kant da claras indicaciones de cómo se debe entender esta caracterización. Veamos su punto de vista a través de un ejemplo tomado de la geometría.

Supongamos que se le pregunta a un geómetra (del siglo dieciocho en este caso) acerca de la relación entre los segmentos de cuerdas que se cortan en el interior de un círculo. Por ejemplo, ¿habrá alguna relación entre el producto de sus longitudes? Tratándose de un geómetra, lo primero que hará será trazar (en el papel o en su imaginación) un círculo, tal como nosotros lo hacemos en la figura 1, construyendo a la vez dos cuerdas *AB y CD* —cuyo punto de intersección es S— como las mencionadas en el enunciado del problema.

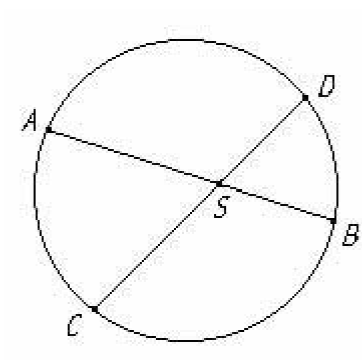



Figura 1

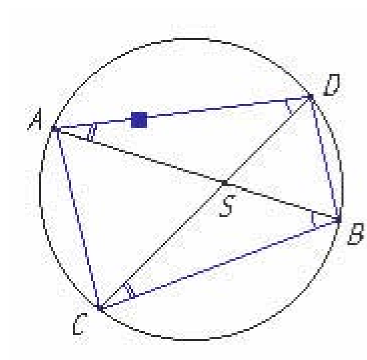



Figura 2

Después, trazará algunas líneas auxiliares como, por ejemplo, los segmentos *AC, AD, BC* y *BD* de la figura 2. Estos elementos lo guiarán en su razonamiento. Veamos.

Por construcción, los puntos *B, D* y *S* se hallan en un mismo semiplano respecto a *AC*. Por tanto, los puntos *B* y *D* pertenecen a uno de los dos arcos en que la recta *AC* divide a la circunferencia. De lo anterior se sigue que los ángulos inscritos *ADC* y *ABC* son iguales, pues subtienden un mismo arco (este es un teorema ya demostrado: Si dos ángulos inscritos en una misma circunferencia subtienden un mismo arco, entonces son iguales entre sí).

18 de enero 2005 • Volumen 6 Número 1 • ISSN: 1067-6079

De igual forma probará que los ángulos *DAB* y *DCB* son iguales entre sí, concluyendo entonces que los triángulos *ASD* y *BSC* son semejantes, pues *SDA* = *SBC*, *SAD* = *SCB* y *ASD* = *CSB*, esto último por tratarse de ángulos opuestos por el vértice. De la semejanza de los triángulos resulta la proporción

$$\frac{AS}{CS} = \frac{SD}{SB}$$

y de ahí, que *AS·SB* = *CS·SD*.
Ahora el geómetra que se ha ocupado de esta cuestión tiene una respuesta: Si dos cuerdas se cortan en un punto interior de un círculo, el producto de los segmentos de una de ellas es igual al producto de los segmentos de la otra. En breve: en el círculo, los productos de los segmentos de cuerdas secantes coinciden.

Según Kant, lo hecho por el geómetra expone la esencia del método matemático. Este punto lo destaca por comparación. Dice: "El conocimiento *filosófico* es un *conocimiento racional derivado de conceptos*; el conocimiento matemático es un *conocimiento obtenido por la construcción de los conceptos.*" [CRP, A 713, B 741] y añade: "[...] el conocimiento filosófico sólo considera lo particular en lo universal; las matemáticas, lo universal en lo particular, e incluso en lo singular, pero sólo *a priori* y por medio de la razón." [A 714, B 742]. Para destacar la diferencia nos pide imaginar qué pasaría si preguntáramos la cuestión anterior a un filósofo (es decir, la relativa a las cuerdas secantes), dejándolo hallar la respuesta a su manera. El punto es que nunca lo haría. Sólo contaría con los conceptos de círculo, arco, segmento y ángulo. Por mucho que reflexionara sobre estos conceptos no sacaría ninguna conclusión nueva (no podría seguir el camino del geómetra: trazar un círculo sería considerar lo universal en lo particular, pero él "sólo considera lo particular en lo universal"). Nuestro filósofo podría analizar y clarificar tales conceptos, pero nunca llegaría a propiedades no contenidas en ellos.

Visto desde esta perspectiva, el conocimiento matemático hace un uso esencial del paso entre los conceptos generales y las intuiciones (individualizaciones) que los representan, al grado que sin él no podría avanzar. Este uso de los conceptos *in concreto* es, según Kant, el rasgo distintivo del método matemático y en él basa la idea de que sus juicios son sintéticos *a priori*.

Miremos esta situación con relación a nuestro ejemplo. ¿Qué elementos intervienen en la demostración anterior? Para empezar, tenemos un círculo trazado en el papel (o, en su caso, en la imaginación o en el monitor de la computadora). Dicho círculo representa de manera particular un concepto general (el concepto de círculo). De igual modo tenemos dos cuerdas AB y CD que, de la misma manera, representan al concepto correspondiente. Estas figuras son la construcción del concepto en la intuición. No obstante, a pesar de que se trata de objetos singulares, no se trata de intuiciones empíricas, pues en su argumento el geómetra sólo se sirve de aquello que corresponde a todas las intuiciones particulares que representan al concepto; por ejemplo, no considera la longitud de las cuerdas o el radio del círculo que ha trazado. Así, aunque las figuras usadas son empíricas, sólo sirven para representar la universalidad de los conceptos correspondientes.

Ahora bien, en la demostración anterior hay algo más. Una vez representados los conceptos, se añadieron algunas construcciones auxiliares a fin de evidenciar ciertas propiedades de las figuras. Tenemos, por ejemplo, la línea AC que muestra de golpe la igualdad de los ángulos *ADC* y *ABC*. En general, tales construcciones tienen como propósito completar la figura, preparando de este modo el escenario para la demostración. A su vez, el argumento final ya no incluye construcciones adicionales; más bien, consiste en una serie de inferencias relacionadas con la figura completada con los trazos auxiliares. En este caso, como en todos, las inferencias se apoyan en: (a) los axiomas de la geometría, (b) algunas propiedades de figuras geométricas previamente demostradas, y (c) las propiedades de la figura que derivan de su construcción.

Una vez alcanzada la conclusión deseada, el geómetra anuncia una respuesta: "la relación entre los segmentos de *cualesquiera* cuerdas que se cortan en el interior de un círculo es que el producto de los segmentos de una de ellas es igual al producto de los segmentos de la otra." Pasa de esta manera de una construcción particular a un enunciado general.[3] El esquema lo expresa Parsons con suma pulcritud: Habiendo asumido una a particular tal que *Fa*, se deduce *Ga*. Se tiene por tanto $Fa \longrightarrow Ga$. No obstante, como a es arbitraria, se sigue que $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$.[4]

Este es el argumento de Kant: la matemática es sintética porque sus resultados se obtienen realizando construcciones. La matemática es *a priori* porque sus construcciones no son empíricas (por ello el geómetra puede afirmar la validez del resultado con relación a todas las intuiciones correspondientes al concepto). Como veremos, estas afirmaciones tienen hoy en día un valor relativo. La aparición de la lógica cuantificacional en el siglo diecinueve permitió substituir tales modos de razonamiento con argumentos enteramente lógicos. Obviamente, la substitución fue concomitante a la formulación de un cuadro más detallado de axiomas.

## *La demostración geométrica en los tiempos de Kant*

Lejos de una explicación plausible de la naturaleza de la demostración matemática, el constructivismo de Kant se veía, a finales del siglo diecinueve, como algo lleno de defectos; esto, al menos, para muchos matemáticos. Las objeciones eran numerosas: ¿Es acaso inevitable el recurso a la intuición en las demostraciones? Si los teoremas se siguen necesariamente de los axiomas, ¿no deberían bastar para su demostración ciertos argumentos lógicos? Lo que en tiempos de Kant fue una explicación satisfactoria, a finales del siglo diecinueve parecía una impertinencia: ¿Cómo es que las proposiciones de la geometría se infieren de los axiomas de Euclides, a la vez que sus demostraciones se apoyan regularmente en objetos construidos en la intuición?

Podemos decir lo siguiente: Hasta mediados del siglo diecinueve, el recurso a las figuras fue indispensable en la geometría elemental, derivada casi en su totalidad de los *Elementos* de Euclides. En la lógica moderna hay elementos que nos permiten dilucidar este hecho.

Uno de ellos tiene que ver con el aparato lógico disponible en los días de Kant. En aquel tiempo la lógica no iba más allá de la teoría silogística de Aristóteles, con sus proposiciones categóricas y formas de inferencia proposicional tales como el *modus ponens*. En términos modernos: el aparato lógico era un fragmento de la lógica monádica, el correspondiente a la lógica silogística.[5] Compárese esto con los recursos de un matemático moderno entrenado en las sutilezas de la teoría de la cuantificación. Por ejemplo, en la lógica monádica no es posible expresar la dependencia cuantificacional de algunas proposiciones que figuran como axiomas en el sistema de los números reales o en la geometría de Hilbert; entre ellas, las correspondientes a la forma lógica "$\forall x \exists y$" (donde la "*y*" cuya existencia se afirma depende de la "*x*").

[3] Este es, en esencia, el método utilizado por Euclides en los *Elementos*, y el paradigma sobre el que Kant modela su teoría del método matemático.

[4] [Parsons, 1969, p. 55].

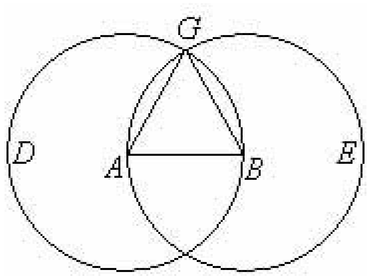
[5] La lógica monádica sólo considera predicados de un argumento como, por ejemplo, "ser número primo" o "ser un triángulo", más no predicados de dos o más argumentos como, por ejemplo, "ser mayor qué" o "estar entre". Los dos primeros se simbolizan *Px y Tx*, mientras que los dos últimos se simbolizan *Mxy y Exyz*. La lógica monádica es suficiente para expresar las cuatro figuras aristotélicas "Todo *S* es *P*", "Ningún *S* es *P*", "Algún *S* es *P*" y "Algún *S* no es *P*". Sus representaciones son, respectivamente, $\forall x(Sx \longrightarrow Px)$, $\forall x(Sx \longrightarrow \neg Px)$, $\exists x(Sx \wedge Px)$ y $\exists x(Sx \wedge \neg Px)$. Nótese que en la lógica moderna la predicación es "*Fx*" y no "*S* es *P*". Por ejemplo, la proposición "Todo hombre es mortal" se representa como $\forall x(Hx \longrightarrow Mx)$. Nótese también que Kant, al igual que la lógica moderna, adopta esta forma de predicación, es decir, substituye la tradicional lógica de términos aristotélica con una de objetos y conceptos; no obstante, en ningún momento hace referencia a la lógica relacional en la que si hay una verdadera dependencia cuantificacional como, por ejemplo, en la fórmula $\forall x \ \forall y \ \exists z(x < y \longrightarrow x < z < y)$, la cuál expresa una propiedad del orden entre los números racionales. Nótese por último que la dependencia cuantificacional del último ejemplo se logra gracias a la presencia del símbolo de relación diádico o binario "<".

18 de enero 2005 • Volumen 6 Número 1 • ISSN: 1067-6079

La imposibilidad de expresar esta dependencia en la lógica monádica se debe al hecho de que en ella los cuantificadores siempre se pueden separar.[6] Así, cada predicado monádico está regido en realidad por un solo cuantificador, por lo que en esta lógica es imposible expresar proposiciones como “cada número real tiene un inverso aditivo” cuya estructura cuantificacional es de la forma “ $\forall\exists$”.

Esta limitación se relaciona con el uso de construcciones para “sacar a la luz” los objetos. Veamos, por ejemplo, cómo demuestra Euclides la posibilidad de construir un triángulo equilátero con un lado dado. Nos referimos a la proposición I.1 de sus *Elementos* “Dada una recta delimitada construir sobre ella un triángulo equilátero”. Como veremos, en su demostración Euclides utiliza la siguiente proposición, la cual resulta evidente en la figura: “Dos circunferencias cuyos centros son los extremos de un segmento y cuyos radios son iguales a dicho segmento, tienen al menos un punto en común”

*Grosso modo*, la prueba es la siguiente:




Sea AB la recta delimitada dada.

(Hip)
Hay que construir sobre *AB* un triángulo equilátero.
(Tes.)

***DEMOSTRACIÓN***

Con centro en *A* y con radio *AB* descríbase un círculo, el *BGD*; y con centro en *B* y con el radio *BA* descríbase el círculo *AGE*. (P. III)
Ahora, desde el punto G en que se cortan tales círculos, trácense las rectas *GA* y *GB*. (P. I)
Dado que el punto *A* es centro del círculo *GDB*, la recta *GA* es igual a la *AB*;
Y dado que el punto *B* es centro del círculo *GAE*, la recta *GB* es igual a la *AB*;
Luego las rectas *GA* y *GB* son iguales entre sí, pues cosas iguales a una y la misma cosa son también iguales entre sí (NC.I)
Por tanto, las tres rectas *GA*, *GB* y *AB* son iguales entre sí.
Según esto, pues, el triángulo *ABG* es equilátero. (D.I.20)
Y está además construido sobre la recta delimitada dada *AB*.
Que es lo que se había de hacer.[7]

Como es evidente, el punto de intersección G depende de A y B. En la demostración, dicho punto aparece como resultado de una construcción, no habiendo ningún argumento lógico que pruebe su existencia. Por lo demás, como ya lo hemos advertido, la expresión de esta dependencia existencial no ha lugar en la lógica monádica. Esto explica el papel que desempeñan las figuras en la demostración euclidiana, suscrita por

[6] Por ejemplo, la fórmula $\forall x \exists y(Fx \rightarrow Gy)$ es equivalente a $\exists xFx \vee \exists yGy$,
[7] Esta demostración cumple todas las condiciones señaladas al final de la sección “Un poco de geometría”.

Kant. Es por construcción que el geómetra exhibe ciertos objetos, lo cual lo exime de probar su existencia.[8] Por otra parte, los axiomas y postulados que ofrece Euclides eran insuficientes para probar tal cosa.[9] Lo anterior explica la necesidad de las figuras en la geometría elemental. Y Kant lo único que hizo fue idear el marco teórico correspondiente a tal "estado de cosas".[10]

Kant sabía que los postulados de Euclides constituyen un sistema incompleto, que de ellos no se siguen por lógica los teoremas de la geometría. No obstante, lo que para otros fuera un estigma no lo era para él. Por el contrario, eso evidenciaba que el razonamiento geométrico no procede —ni puede proceder— analíticamente, sino mediante la construcción de conceptos en la intuición pura. La construcción y la síntesis *a priori* van de la mano en este caso: La lógica no basta, "el conocimiento matemático es un *conocimiento obtenido por la construcción de los conceptos*." [11][12]

Para superar el punto de vista de Kant fueron necesarios algunos avances en la lógica y las matemáticas. En lo que sigue nos referiremos a algunos de ellos.

## *Frege y Hilbert*

Hacia finales del siglo diecinueve el constructivismo de Kant dejó de ser, a los ojos de muchos matemáticos, una explicación plausible de la naturaleza de las matemáticas; más bien, se le veía como algo lleno de defectos. Eran muchas las objeciones: ¿Por qué el recurso a la intuición en las demostraciones? ¿Es en verdad indispensable? En la demostración de un teorema, ¿no debería bastar la argumentación lógica? Uno de los primeros en ocuparse de estas cuestiones fue Frege, quien, curiosamente, dirigió sus esfuerzos no tanto a la geometría como a la aritmética.

En un principio, Frege trató de integrar la matemática del siglo XIX en un cuadro epistemológico muy cercano a la tabla de las categorías de Kant. No obstante, hacia 1870 se había convencido de que las ideas de Kant acerca de la demostración en geometría eran incorrectas, y que tales deficiencias sólo se podrían corregir mediante una revisión exhaustiva de la lógica, proyecto que inició brillantemente en 1879 con la publicación de su *Conceptografía [Begriffsschrift]*. En 1884 estaba preparado para publicar un recuento detallado de su filosofía de las matemáticas. Desde un principio supuso que el problema central en este dominio era identificar los fundamentos de esta disciplina. Aquí por "fundamentos" se debe entender *exhibir*

---

[8] Desde este punto de vista, los postulados de Euclides no se ocupan de cuestiones relativas a la existencia de los objetos, sino a la posibilidad de la construcción. V. gr., el postulado I, "Trazar una línea recta de un punto cualquiera a otro punto cualquiera" tiene como finalidad permitir el trazo (construcción) una línea recta, no "traerla a la existencia".

[9] Mucho se ha dicho acerca de estas lagunas en el sistema euclidiano, el cual carece, por ejemplo, de axiomas para la continuidad, sobre cuya base se podría probar la existencia del punto G en el ejemplo recién visto. V. gr., ¿qué pasaría si el plano euclidiano fuera "poroso" y muchos círculos "intersecantes" a la vista no lo hicieran en ningún punto de él? i. e., ¿qué pasaría si los círculos fueran discontinuos? Obviamente, esta cuestión se mira como una insensatez desde la "geometría del papel", pues es evidente que tales círculos se cortan en un punto. No obstante, este hecho evidente no se sigue lógicamente de postulados de Euclides. Así, en la matemática moderna se han podido definir sistemas de puntos, líneas y círculos que satisfacen los postulados de Euclides y no cumplen con la propiedad de que circunferencias como las de la proposición I.1 de Euclides tengan algún punto en común.

[10] En A 716-7 dice Kant: "A través de una cadena de inferencias y guiado siempre por la intuición, el geómetra consigue así una solución evidente y, a la vez, universal del problema". Más adelante, en A 734, afirma: "Una prueba apodíctica sólo puede llamarse demostración en la medida en que sea intuitiva". Para Kant, el recurso a la intuición no es un defecto, sino un rasgo esencial de la demostración matemática. Si la filosofía de Kant tiene alguna virtud, es ésta: lo bien que se ajusta al estado de las ciencias matemáticas de su tiempo, un logro que no ha podido igualar la posteridad. Al respecto, véase [Friedman, 1992, pp. xi-xii].

[11] Esto es casi una consecuencia de su tesis de que las proposiciones geométricas son sintéticas *a priori*. Esta "incompletud" de los axiomas estaría relacionada con la imposibilidad de "captar en conceptos" todas las propiedades de los objetos referidos por ellos; en este sentido, el uso de construcciones (el recurso a la intuición) supliría los recursos faltantes, pues en el empalme de construcciones surgen muchas propiedades de los objetos considerados.

[12] Aquí cabe recordar el significado primigenio de la palabra teorema, la cual deriva del griego *Theorema*, "meditación", "contemplación", investigación", voz relacionada con el griego *Théatron*, "yo miro, contemplo" (y, por tanto, con la palabra "teatro").

18 de enero 2005 • Volumen 6 Número 1 • ISSN: 1067-6079

*la justificación propia para los enunciados matemáticos bajo estudio*. Su respuesta fue dual: La geometría se fundamenta en nuestra intuición espacial (en el sentido de Kant); la aritmética, en cambio, es un desarrollo de la lógica. Toda proposición aritmética es derivable de la lógica mediante las definiciones y la terminología adecuadas. Para llevar a cabo esta tarea elaboró un sistema lógico que, al presente, constituye el logro más importante en la historia de la lógica: la teoría de la cuantificación.[13]

En la *Conceptografía*, Frege presenta lo que considera el marco lógico que gobierna a todo el pensamiento racional. No se trata de una teoría matemática, ni es acerca de nada con lo que nos hayamos familiarizado a través de la intuición o de cualquier otra facultad. Los teoremas y principios ahí expuestos se hallan implícitos en cualquier pensamiento coherente acerca de cualquier cosa. Expresa, por decirlo de alguna manera, el substrato lógico de todas nuestras teorías. Es en este marco que intenta reconstruir la aritmética, refutando con ello a Kant: ésta dejaría de depender de nuestra intuición espacio-temporal, edificándose sobre la base de las condiciones más generales del pensamiento mismo. En última instancia, la proclama de Frege es la siguiente: la aritmética es analítica; sus juicios no son sintéticos *a priori*. A esto dirigió sus esfuerzos durante más de veinte años.

En la actualidad muchos filósofos y matemáticos comparten tesis semejantes, pero no todos. Lo que sí es universal es la aceptación del "salto hacia delante" que significó para la lógica la invención de la teoría de la cuantificación. Los recursos que ésta ofrece permiten expresar, por ejemplo, las relaciones de orden entre los puntos sobre una línea recta o entre los números reales, las cuales eran aceptadas espontáneamente en el contexto que hemos bosquejado con relación a Kant.[14] Tales enunciados tienen una estructura lógica más compleja que, digamos, los postulados de Euclides, y muestran relaciones de dependencia cuantificacional como las ya señaladas.

Otra noción que la teoría de la cuantificación vino a apuntalar es la de "estructura relacional", en términos de la cual Hilbert ubica sus axiomas para la geometría. Se trata de "sistemas posibles de objetos" como, por ejemplo, los modelos de la teoría de *grupos*. Esta manera de pensar las teorías matemáticas como referidas a estructuras abstractas no tenía cabida en tiempos de Kant. Así, por ejemplo, aunque no haya contradicción en el concepto de "figura contenida entre dos líneas rectas" (A 221), para Kant esto no significa que hay una estructura no euclidiana conteniendo una figura de tal naturaleza.[15] Sólo hay una manera de pensar tales propiedades: en el espacio y el tiempo de *nuestra* intuición (euclidiana). Fuera de ella, el concepto de figura no euclidiana permanece "vacío" y carece tanto de sentido como de significado.[16] En términos un poco más técnicos: para Kant, las variables del discurso lógico habrían de variar sobre los objetos de la experiencia posible, no sobre cualesquiera objetos lógicamente posibles.

---

[13] Aquí no nos adentraremos en los procedimientos que utiliza Frege en su intento por reducir la aritmética a la lógica. Al respecto hay excelentes tratados y la historia es muy compleja, pasando por Russell, la teoría de clases, las paradojas, la teoría de tipos, la crisis en los fundamentos de las matemáticas, etc.

[14] No es nuestra intención sugerir que los matemáticos debieron aguardar hasta la aparición de la teoría de la cuantificación para expresar tales relaciones; más bien, el lenguaje de fórmulas que ésta ofrece tiene los medios necesarios para articular de manera uniforme tales relaciones, las cuales aparecieron al formular de manera precisa algunos conceptos como los de límite y continuidad, en cuya expresión formal aparecen estructuras de cuantificadores fuera del alcance de la lógica tradicional. V. gr., la definición moderna de continuidad es la siguiente: Una función f de R en R (el conjunto de los números reales) es *continua* en el punto $x_0$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ siempre que $x \in D_f$ y $|x - x_0| < \delta$. Nótese cómo reaparece en este contexto la forma lógica "$, la cual no ha lugar en la lógica tradicional (v. gr., en la lógica monádica). En otras palabras, en la época de Kant no se contaba con los medios expresivos necesarios para formular esta noción de continuidad.

[15] En efecto, desde su particular punto de vista, dicha estructura debería poseer las propiedades topológicas (densidad y continuidad) comunes a los espacios euclidianos y no euclidianos, y esto lo considera imposible. Al respecto, véase [Friedman, 1985].

[16] En realidad, esto lo piensa Kant con relación a todos los conceptos, no sólo los geométricos: "Los pensamientos sin contenido son vacíos; las intuiciones sin conceptos son ciegas." (A 51).

Hacia 1899 las matemáticas ya habían avanzado lo suficiente como para adoptar un punto de vista diferente. En su libro *Fundamentos de la geometría [Grundlagen der Geometrie*] Hilbert expone un sistema de axiomas para la geometría elemental en el marco de la teoría de la cuantificación, aunque escrito en lenguaje coloquial. Este sistema presenta una teoría explícita acerca del orden entre los puntos de una línea, ausente en los *Elementos* de Euclides, y axiomas relativos a la continuidad. Una finalidad del libro es reconstruir la geometría sin el recurso a la intuición, cuyo uso queda proscrito en las demostraciones. En conformidad, Hilbert no asume nada como conocido de antemano, por lo que evita la tentativa de definir los conceptos básicos de la teoría (puntos, líneas y planos) mediante explicaciones en términos de inextensión, etc.[17]; más bien, la teoría se presenta como algo relativo a cualquier sistema de "entes" (a los que denomina puntos, líneas y planos) que satisfaga los axiomas. La única exigencia es que los axiomas no se contradigan entre sí, sujetándose la cuestión de su verdad a esta limitante. Se trata, además, de un punto de vista extensible a toda la matemática, cuyas teorías pueden ser acerca de cualquier cosa mientras no incurran en contradicciones.

Fue un momento en el que la matemática logró su grado máximo de abstracción, donde por esto último debemos entender "teorizar acerca de cualquier sistema de objetos lógicamente posible". Con ello la matemática desestimó la exigencia de que sus conceptos fueran construibles. Esto sucede, por ejemplo, con relación a los números transfinitos de Cantor, los cuales no corresponden a ninguna clase de objetos de la experiencia posible. El instrumento de tales desarrollos teóricos es el método axiomático en su formulación moderna.

Veamos cómo inicia Hilbert la exposición axiomática en los *Fundamentos de la geometría*:

> *Aclaración*. Pensemos en tres clases diferentes de objetos. Llamemos a los objetos del primer sistema *puntos* y designémoslos con *A, B, C*...; llamemos a los objetos del segundo sistema *rectas* y designémoslas con *a, b, c*...; a los del tercer sistema llamémoslos *planos* y designémoslos con *a, b, g*.... Los puntos se llaman también *elementos de la geometría lineal*, puntos y rectas se llaman *elementos de la geometría plana*; y puntos, rectas y planos se llaman elementos de la *geometría espacial o del espacio*.
>
> Supongamos que puntos, rectas y planos están en ciertas relaciones mutuas que designaremos con las palabras «estar en», «entre», «paralelo», «congruente» y «continuo», cuya exacta y completa descripción se logrará por medio de los axiomas de la geometría.[18]

Hilbert distribuye los axiomas de la geometría en cinco grupos, cada uno de los cuales expresa, según dice, "ciertos hechos, conexos entre sí y fundamentales, de nuestra intuición."[19] Tales grupos de axiomas son los siguientes: Grupo I, axiomas de *incidencia*; grupo II, axiomas de *orden*; grupo III, axiomas de congruencia, grupo IV, axioma de paralelismo (axioma de Euclides) y grupo V, axiomas de *continuidad*.

Los que siguen son los axiomas de orden (Grupo II) para la geometría plana, tomados, con ligeras modificaciones, de la edición de 1899. Nótese cómo algunos de ellos tiene una estructura lógica similar a la antes mencionada, cuya debida expresión requiere de la teoría de la cuantificación.

---

[17] Por ejemplo, Euclides presenta la siguiente "definición": *Punto es aquello que ya no tiene partes.* Al igual que muchas otras, esta definición no ocupa ningún lugar en el desarrollo de la teoría (no se le utiliza en ninguna parte), siendo más bien una indicación que dirige al espíritu hacia aquello que se tiene en mente.

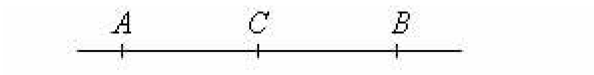
[18] [Hilbert 1903, p. 1].

[19] [Hilbert, ibid.]

18 de enero 2005 • Volumen 6 Número 1 • ISSN: 1067-6079

### *Axiomas de orden*

**II.1** Si el punto *C* está entre *A y B*, entonces *A, B y C* están en una misma línea, *C* está entre B *y A, B* no está entre *A y C, y A* no está entre *B y C*.




**II.2** Si *A y B* son dos puntos distintos dados, hay un punto *C* que está entre *A y B*, y un punto *D* tal que *B* está entre *A y D*.

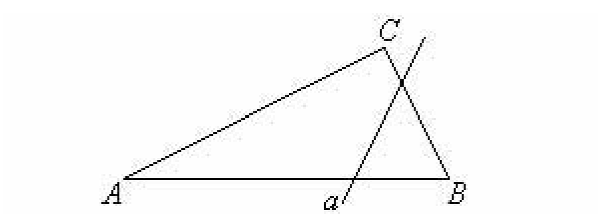

**II.3** Si *A, B y C* son tres puntos distintos en una misma línea, entonces uno de ellos está entre los otros dos.

**Definiciones.** Por el *segmento AB* se entiende los puntos *A y B* y todos los que están entre *A y B*. Los puntos *A y B* se llaman *extremos* del segmento. Un punto *C* se dice que está *sobre* el segmento si es alguno de sus extremos o está entre *A y B*.

**Definición.** Dos líneas, una línea y un segmento, o dos segmentos, se dice que se *cortan* si hay un punto que está en ambos.

**Definición.** Sean *A, B y C* tres puntos que no están en una misma línea. Por el *triángulo ABC* se entiende los tres segmentos *AB, BC y CA*. Se dice que estos segmentos son los *lados* del triángulo, y los puntos *A, B y C* se llaman *vértices* del triángulo.

**II.4** (Postulado de Pasch) Una línea que corta un lado de un triángulo y que no pasa por ninguno de sus vértices deberá cortar también otro lado del triángulo.[20]




Respecto al lenguaje, Hilbert podría haber escrito las proposiciones geométricas en la notación simbólica desarrollada por Peano y su escuela para la teoría de la cuantificación, pero no lo quiso hacer. Por ejemplo, en vez del enunciado "los puntos *A y B* están en la recta a" pudo escribir simplemente f(*A, B, a*), de modo que la expresión misma no contuviera referencias a ninguna relación intuitiva. Una fórmula como f(*A, B, a*) representa en general una relación entre ternas de objetos, de la que lo único que sabríamos sería lo que especificaran los axiomas. No obstante, Hilbert prefirió no recurrir a un simbolismo de esta naturaleza para atraer un mayor número de matemáticos.

---

[20] [Hilbert, 1903, 6-7]. Un ejercicio interesante es expresar estos axiomas en el lenguaje simbólico de la teoría de la cuantificación, revelándose de esta manera su estructura cuantificacional. Por ejemplo, el axioma II.2 lo podemos escribir (con algunas licencias) como sigue: $\forall A \forall B(P(A) \wedge P(B) \wedge A \neq B \rightarrow \exists C \exists D(P(C) \wedge P(D) \wedge E(C, A, B) \wedge E(B, A, D)))$, donde P(*x*) hace las veces de "x es un punto" y E(*x, y, z*) las de "*x* está entre *y* y *z*".

En cuanto al planteamiento de la teoría, esta es la idea subyacente: de sus objetos nada sabemos de antemano; más bien, éstos, junto con sus mutuas relaciones, quedan definidos de manera implícita por medio de los axiomas. El significado que pudieran tener sus términos es irrelevante para el desarrollo de la teoría, pues en su despliegue sólo se habrá de apelar a la lógica y los axiomas. Si alguien preguntara "¿qué son los puntos?", "¿qué son las líneas?" la única respuesta sería "cualquier sistema de objetos y relaciones entre ellos que satisfaga estos axiomas" y se le mostraría la lista de estos últimos.[21]

## *Un "adiós" al constructivismo de Kant*

La postura de Hilbert, que evita asumir la existencia extramatemática de los objetos considerados, no fue del agrado de todos. Por ejemplo, Frege le reprocha que con base en sus postulados, él (Frege) no puede saber si su reloj de bolsillo es un punto, pues en ningún sitio se da una definición explícita de este concepto.[22] Aun así, una respuesta a tal pregunta es que su reloj de bolsillo será un *punto* en caso de que forme parte de un sistema de objetos que satisfagan los axiomas.[23] Aquí se hace presente la teoría de las definiciones implícitas impulsada por Hilbert.

Las discrepancias entre Frege y Hilbert no terminan aquí. No debemos olvidar que Frege adopta el punto de vista de Kant en cuanto al origen de los axiomas de la geometría. Es, por decirlo de algún modo, mitad kantiano (geometría) y mitad antikantiano (aritmética). Al respecto, en una carta escrita en 1899 se dirige a Hilbert con las siguientes palabras: "Llamo axiomas [de la geometría] a las proposiciones que son verdaderas pero no demostradas porque el conocimiento de ellas proviene de una fuente muy distinta de la lógica, una fuente que podemos llamar intuición espacial. De la verdad de los axiomas se sigue que no se contradicen entre sí."[24] Frege objeta a Hilbert la manera en que presenta sus axiomas, de los que no ofrece ninguna explicación: ¿Acerca de qué son ciertos, si sus objetos no han sido dados?, ¿cómo saber entonces de su verdad? Días más tarde Hilbert le responde: "Yo no quiero asumir nada como conocido por anticipado; considero mi explicación de la sección 1 [de los *Grundlagen*] como una definición de los conceptos punto, línea, plano —si uno añade nuevamente todo los axiomas de los grupos I al V como marcas características. Si se buscan otras definiciones de 'punto', v. gr., mediante paráfrasis en términos de inextensión, etc., entonces me debo oponer a tales intentos en forma decisiva; uno busca algo que nunca encontrará porque no hay nada ahí."[25] Y añade: "Encuentro muy interesante leer esta frase en su carta ['De la verdad de los axiomas ...'], pues en la medida en que he pensado, escrito y enseñado tales cuestiones, he dicho exactamente lo contrario: Si los axiomas, puestos arbitrariamente, no se contradicen en sus consecuencias, entonces son verdaderos y las cosas definidas por ellos existen. Este es para mí el criterio de verdad y existencia."[26]

---

[21] En los Grundlagen, los objetos denotados por los términos geométricos no son entidades intuitivas (aunque se hayan originado de esa manera), ni entes cuyas propiedades dependan del hecho de ser idealizaciones de algo dado en la intuición. De la misma manera, como se trata de desarrollar la teoría al margen de la intuición, los axiomas no se pueden justificar apelando a su evidencia.

[22] [Frege, 1980, pp. 31-51]. La cita textual es: "Dadas sus definiciones, no sé cómo decidir la cuestión de si mi reloj de bolsillo es un punto."

[23] Hay otra razón para dejar indefinidos ciertos términos: así como no todo se puede demostrar en un sistema deductivo, también debe haber términos indefinidos para evitar un retroceso infinito o un procedimiento circular.

[24] Frege, carta a Hilbert fechada el 27 de diciembre de 1899. Cita tomada de [Frege 1980, p. 37].

[25] Hilbert, carta a Frege fechada el 29 de diciembre de 1899. Cita tomada de [Frege 1980, p. 39].

[26] Hilbert, *Ibid.* En cuanto a la consistencia, Hilbert considera que ésta se puede determinar mediante una interpretación de los axiomas en otra teoría que los haga verdaderos (consistencia relativa); más tarde, hacia 1904, pensaría en una segunda posibilidad con relación a los axiomas de la aritmética: probar, mediante un estudio combinatorio, que de ellos no se puede deducir ninguna contradicción (consistencia absoluta).

Hilbert nos coloca ante un nuevo concepto de existencia matemática, sustentado esta vez en la ausencia de contradicción. Desde este punto de vista, para aceptar como existente una entidad matemática en una teoría basta con demostrar que su asunción no implica contradicción, un sentido mucho más débil que el de la existencia empírica[27]. Así, por ejemplo, la noción central de la teoría de conjunto de Cantor, la de *infinito actual*, aunque no se puede representar *a priori* en la intuición ni corresponde a nada empírico, tendrá plena existencia matemática cuando se pruebe que los axiomas que la definen no se contradicen entre sí. Con ello, Hilbert reivindica la libertad que tienen los matemáticos de considerar nociones abstractas a las que nada corresponde en la representación.

Este es el carácter de la nueva matemática: su realidad no la debemos buscar fuera de ella; más bien, sólo existe en su interior como una idea. Esta novedosa concepción abre un inusitado mundo de posibilidades y un espacio para el caudal de nociones no constructivas de la matemática moderna.

## *Kant y Hilbert*

La postura de Hilbert ante la filosofía de Kant no es tan divergente como pudiera parecer a primera vista. Por el contrario, como a continuación veremos, algunas de sus ideas están inspiradas o son muy cercanas a las de Kant.

Por ejemplo, el rechazo de Hilbert al constructivismo de Kant se da como parte de un movimiento hacia una mayor generalidad en las matemáticas. Simplemente, extiende el dominio de esta última a zonas excluidas por la filosofía crítica, renunciando a la idea de que las matemáticas hayan de contener verdades necesarias. Tales zonas antes descartadas ya están previstas en la filosofía de Kant cuando afirma:

> El conocimiento de un objeto implica el poder demostrar su posibilidad, sea porque la experiencia testimonie su realidad, sea a priori, mediante la razón. Puedo, en cambio, pensar lo que quiera, siempre que no me contradiga, es decir, siempre que mi concepto sea un pensamiento posible, aunque no pueda responder de si, en el conjunto de todas las posibilidades, le corresponde o no un objeto. Para conferir validez objetiva (posibilidad real, pues la anterior es simplemente lógica) a este concepto, se requiere algo más.[28]

No es que Kant se haya equivocado respecto a las matemáticas de su tiempo; más bien, fueron las matemáticas las que cambiaron. Pasaron del conocimiento por construcción de conceptos a la consideración de "cualquier cosa pensada" tal como lo concede Kant en el pasaje anterior. No debemos olvidar el contexto histórico de Hilbert, quien vivió en una época en la que la insistencia de Kant en un solo sistema de geometría para el mundo físico ya no tenía sentido. Ahí está también la tesis kantiana acerca de la imposibilidad trascendental del espacio no euclidiano, la cual, según él, se funda en el hecho de que el espacio de la percepción obedece las leyes de la geometría euclidiana, única experiencia espacial posible para nosotros[29]. Una idea perfectamente viable en el siglo dieciocho, y perfectamente inviable a finales del siglo diecinueve o (posteriormente) a la luz de la teoría de la relatividad.

---

[27] No se trata de que la no-contradicción sea la señal de una entidad preexistente; más bien, la noción matemática de existencia tiene el mismo alcance que la noción lógica de *no-contradicción*. Como veremos, esto de ninguna manera implica que Hilbert niegue la existencia de ciertos entes matemáticos extralógicos: los signos y sus combinaciones finitas.

[28] Kant, CRP, B XXVII, nota *k*.

[29] Según Kant, una percepción no euclidiana es imposible en la medida en que hay ciertas restricciones a nuestra capacidad para representarnos cosas por medio de la visión o del tacto. Esta es la raíz de su negativa a considerar otras posibilidades. Por tanto, el impedimento a las geometrías no euclidianas no se halla, según esto, en la lógica, sino en el hecho de que se trata de posibilidades vacías.

Al respecto, Hilbert rechaza no tanto la tesis en sí, sino su radicalidad: ¿No tiene Kant algo de razón al decir que el espacio de la percepción obedece las leyes de geometría euclidiana? Si limitamos esta afirmación al espacio de la hoja de papel en que trazamos figuras, a la superficie del pizarrón o a nuestro entorno sensible inmediato, puede que así sea. Todo se reduce entonces a una cuestión de "ámbitos de validez".

Esta es la base intuitiva que Hilbert le confiere a la geometría elemental: sus axiomas consignan los dictados de nuestra intuición al considerar figuras espaciales. Esta idea se refuerza al reflexionar en torno a las palabras iniciales de los *Grundlagen*:

> La geometría —al igual que la aritmética— requiere para su desarrollo sistemático sólo de un reducido número de principios básicos simples. Estos principios son conocidos como axiomas de la geometría. Establecer axiomas para la geometría e investigar la forma en que se relacionan entre sí es un problema que se ha discutido desde la época de Euclides en diversas y admirables contribuciones a la literatura matemática. El problema en cuestión equivale al análisis lógico de nuestra intuición espacial.[30]

Hilbert ubica el origen de los conceptos y los axiomas geométricos en el ámbito de la intuición, mas no en el de la intuición pura, *sino en la consideración de lo que la intuición sensible supone*.[31] La tarea del análisis lógico consiste precisamente en tender un puente entre nuestra intuición espacial y el entendimiento. No ve en los axiomas verdades necesarias, sino proposiciones que pueden ser refutadas por la experiencia o incluso contradecirse entre sí: la intuición también nos puede confundir o engañar (por ello la prueba de consistencia que ofrece en el capítulo 2).

Aquí lo que está en juego no es tanto si las proposiciones de la geometría son sintéticas a priori o no; más bien, se trata de la vaguedad de nuestras intuiciones. Esto ya lo había advertido Felix Klein en 1898: "Los resultados de cualesquiera observaciones son válidos únicamente dentro de ciertos límites de exactitud y bajo condiciones particulares; al establecer los axiomas, sustituimos esos resultado por aseveraciones de absoluta precisión y universalidad."[32] En los *Grundlagen* de Hilbert, también, la percepción de las relaciones espaciales se encuentra idealizada en los axiomas. Esto lo da a entender Hilbert a través de un epígrafe, tomado de la *Crítica de la razón pura* de Kant, que coloca al inicio del libro: "Así, todo conocimiento humano se inicia con intuiciones, pasa de éstas a los conceptos y termina en las ideas."

Hilbert ve en su teoría axiomática algo similar a las *ideas* en el sentido de Kant, es decir, un objeto de la razón que carece de realidad y que en su perfección sobrepasa la posibilidad de la experiencia. Esto es así porque los axiomas, en su conjunto, no son susceptibles de una comprobación plena. Podemos ver ahora cómo es que Hilbert tomó algunas ideas de Kant y las adaptó a su filosofía de las matemáticas. No obstante, lo expuesto hasta aquí no es sino la mitad de esta historia. La otra mitad la veremos después de pasar lista al intuicionismo de Brouwer.

---

[30] [Hilbert, 1903, p. 1].

[31] Por ejemplo, con relación a las figuras que acompañan algunos axiomas en los *Grundlagen*, podemos decir que éstas son las intuiciones que los explican, y que los axiomas expresan tales hechos de la intuición en términos de una relación entre los conceptos de "línea", "triángulo", "pasar por", "cortar", etc. Al respecto, Hilbert no hace ningún uso adicional de tales figuras en el desarrollo de su teoría.

[32] Cita tomada de [Körner, 1972, pp. 9-10].

18 de enero 2005 • Volumen 6 Número 1 • ISSN: 1067-6079

## *El intuicionismo de Brouwer*

Como una imagen en el espejo de Frege tenemos al matemático holandés L. E. J. Brouwer, quien rechaza la tesis kantiana acerca de la intuición espacial, pero acepta la tesis de que nuestro concepto de la serie de los números naturales deriva de nuestra intuición temporal. De esta aceptación deriva el nombre de "Intuicionismo" que se le ha dado a esta tendencia filosófica.

El intuicionismo fue la respuesta de Brouwer al logicismo de Russell, a la matemática no constructiva y a las paradojas, y se apoya en tres tesis radicales: i) los objetos matemáticos se construyen directamente en la intuición pura, siendo por ello previos al lenguaje y a la lógica; ii) las leyes que rigen el comportamiento de dichos objetos derivan de su construcción, no de la lógica, como pretenden Frege, Russell y los logicistas[33] y iii) en la matemática no es admisible ninguna teoría que rebase el marco de lo dable en la intuición, como sostienen Hilbert y los cantorianos.

En el umbral de la matemática intuicionista se encuentran los números naturales, los cuales se construyen de inmediato en la mente del matemático; la verdad de los enunciados referidos a ellos se basa en la evidencia intuitiva.[34] Son el punto de partida en la construcción del edificio. Asimismo, dado que los objetos matemáticos están presentes como algo dado en la intuición, o se construyen a partir de aquello que así se ofrece, Brouwer tiene como norma que toda definición sea constructiva, es decir, indique la manera de obtener los objetos definidos. En cuanto a la noción de *construcción mental*, ésta no puede explicarse a través de conceptos que le sean más simples; es, en este sentido, primigenia.

De lo anterior se desprende que el intuicionismo de Brouwer comprende dos cuestiones en cierto sentido complementarias. Una es su base filosófica, que encuentra sus raíces en la filosofía de Kant; la otra, es la peculiar reconstrucción que hace de la matemática, comenzando por la aritmética.[35]

Para entender la polémica de Brouwer con Hilbert, lo más conveniente es enunciar de manera sucinta algunas de sus ideas acerca de la matemática clásica y la manera en que considera se le debe rehacer. Si se tiene presente que para él la matemática es ante todo una actividad constructiva del intelecto humano y que sus métodos y procedimientos se han de supeditar a la posibilidad misma de la construcción, las siguientes conclusiones, extraídas de sus escritos, se explican por sí mismas:

1) La aritmética no se puede justificar mediante un fundamento axiomático, pues la intuición precede a dicha estructura. La inducción matemática es una intuición fundamental, no sólo un axioma.
2) La matemática debe suministrar métodos y criterios constructivos para determinar en un número finito de pasos los objetos con los que trata. Toda prueba debe ser constructiva.

En particular, dado que el infinito actual no tiene un fundamento constructivo, tampoco tiene cabida en la matemática. Sólo se admite el infinito en potencia (es decir, se rechaza la teoría de conjuntos de Cantor).

---

[33] En síntesis: no es la lógica sino la intuición lo que determina la corrección matemática.

[34] Esta evidencia intuitiva no hace referencia a hechos externos de ninguna especie. En este sentido el intuicionismo considera que la matemática es una libre creación del espíritu humano, y que su única limitante es la posibilidad de la construcción. De hecho, esta corriente tiene fuertes vínculos con el constructivismo matemático moderno, aunque este último no asume necesariamente tales supuestos filosóficos.

[35] La concepción de Brouwer se halla dispersa en múltiples ensayos de diferente contenido, unos de carácter técnico, otros de carácter filosófico, muchos de ellos polémicos. No fue sino hasta la aparición de los trabajos de Arend Heyting (1898-1980), una de las figuras rectoras de esta escuela a partir de los años treinta, que estos temas fueron expuestos de manera sistemática (véase sobre todo [Heyting, 1956], donde se expone de manera ordenada la reconstrucción intuicionista de la matemática). En la actualidad se cuenta con algunos textos que abordan el tema de la filosofía y la matemática intuicionista de manera mucho más accesible; uno de ellos, quizá el más sencillo y recomendable, es [Dummett, 1977].

3) La existencia de los objetos matemáticos depende de la posibilidad de construcción de los objetos mismos; por tanto, "existen" sólo aquellos seres matemáticos que son construidos.

En particular, el axioma de elección de Zermelo, uno de los pilares de la reconstrucción axiomática de la teoría de conjuntos, es inaceptable: los objetos cuya existencia afirma no satisfacen la exigencia de ser el resultado de una construcción.

Junto con la condena del infinito actual, Brouwer rechaza las pruebas de existencia por reducción al absurdo (introducidas por Hilbert en el siglo diecinueve), pues en ellas no se indica la manera de construir el objeto. Esto trajo como consecuencia la restricción del principio del tercero excluido —sobre el que se basan estas pruebas— a conjuntos finitos. De ahí la siguiente tesis:

4) El principio del tercero excluido no siempre es válido con relación a proposiciones en las que se hace referencia a conjuntos infinitos.

Como se ve, Brouwer se arroga la tarea de poner entre paréntesis la matemática existente a fin de reconstruir sus partes vitales, esta vez utilizando sólo conceptos y modos de inferencia con una clara justificación intuitiva. Esta postura constituía un exceso a los ojos de una gran mayoría de matemáticos. En el punto de partida ni siquiera la lógica está prejuzgada; más bien, sus reglas se van generando como parte de la actividad mental del matemático.[36] De hecho, Brouwer desestima el proyecto de formalización de la lógica intuicionista de su discípulo Arend Heyting, calificándolo de "ejercicio estéril".

Brouwer es quizá el matemático que asume con mayor ahínco la tesis kantiana de que la aritmética es una ciencia cuyos rudimentos se hallan en la intuición pura del tiempo. Hamilton hizo algo semejante con relación al álgebra en el siglo diecinueve; no obstante, sus esfuerzos no tuvieron ni la repercusión ni la envergadura de los de Brouwer, cuya escuela representa una dirección bien constituida en la actualidad.

En lo que sigue examinaremos la respuesta de Hilbert al radicalismo de Brouwer, cuya postura surgió en medio de un debate acerca de la legitimidad de la teoría de los conjuntos de Cantor, los principios axiomáticos asumidos por Zermelo para esta teoría y los métodos de demostración no constructivos introducidos por Hilbert en el siglo diecinueve. Además, ahí estaba la crisis desencadenada por las paradojas en la teoría de conjuntos y las críticas a la reconstrucción del continuo numérico basada en las llamadas *cortaduras de Dedekind.*

## *La cuestión de los fundamentos*

Una rigurosa aplicación de los principios propuestos por Brouwer conduciría directamente al abandono del continuo numérico propuesto por Cantor y elaborado por Dedekind. Conduciría también a la exclusión de la teoría de conjuntos de Cantor y al rechazo de la lógica clásica: un panorama desolador desde el punto de vista de Hilbert. Además, también estaba en juego la noción de existencia propuesta por él y su visión de la matemática como "ciencia de lo posible" (frente a la idea de la matemática como "ciencia de las construcciones posibles").

A la reacción de Brouwer, Hilbert opuso la suya propia: a fin de cuentas, su fe en el método axiomático no sufrió ningún quebranto en medio de la crisis. Para salir victorioso en esta contienda, debía repeler los ataques de su opositor de manera satisfactoria a los ojos de la comunidad matemática. Este reto lo llevó a decantar sus ideas acerca del pensamiento matemático.

---

[36] Para Brouwer, la matemática no está obligada a respetar ningún principio lógico con anterioridad a su desarrollo —no hay principios lógicos *a priori*—, pues es la intuición, no la experiencia, la que determina la validez y admisibilidad de las ideas.

18 de enero 2005 • Volumen 6 Número 1 • ISSN: 1067-6079

Hilbert comienza por reconocer que la matemática clásica comprende dos tipos de nociones: descriptivas e ideales. *Grosso modo*, las primeras corresponden a objetos y construcciones concretas de la experiencia sensible. Por el contrario, las nociones ideales son ideas de razón que trascienden el ámbito de la percepción e incluso de toda experiencia; su función es completar las teorías matemáticas.[37] Entre las nociones ideales no sólo se encuentra el infinito actual, sino ciertos principios lógicos que no se pueden justificar con base en consideraciones intuitivas. Un ejemplo de éstos es precisamente el principio del tercero excluido. Tales principios no son susceptibles de una verificación directa, mas su función es complementar el aparato demostrativo a fin de preservar las leyes de la lógica aristotélica.[38]

Ahora bien, el hecho de que las proposiciones de la matemática no constructiva no se puedan justificar como verdades materiales evidentes no es, desde su punto de vista, un motivo para renunciar a ellas. Más bien, lo procedente es examinar los métodos y conceptos con que se ha enriquecido la matemática y resguardarlos de cualquier peligro mediante una prueba de consistencia. Sobre todo, había que aclarar la naturaleza del infinito, blanco favorito de todos los ataques. La tarea revestía cierta importancia en virtud de que esta noción se halla también al centro del análisis matemático, en muchos casos bajo la modalidad del infinito actual.

En un trabajo dedicado específicamente a este problema Hilbert fija su posición: "El papel que resta al infinito es el de una idea, según la concepción kantiana de ésta, como un concepto de razón que supera toda experiencia y por medio de la cual se complementa lo concreto en el sentido de una totalidad."[39] Para Hilbert, el lugar propio y justificado del infinito no es la realidad, sino *nuestro pensamiento*, dominio en el que asume una función conceptual absolutamente imprescindible. Nada le corresponde en la experiencia, ni le podemos adjudicar validez objetiva. No obstante, al igual que muchas otras nociones ideales de las matemáticas, se trata de un instrumento esencial de la razón. En este sentido, lo que busca Hilbert no es probar la existencia real del infinito, sino legitimarlo como un objeto del pensamiento mediante una prueba de consistencia.[40] Aquí vemos reaparecer la idea kantiana acerca de la libertad de pensar cualquier cosa siempre que no se incurra en contradicciones.

Tenemos, por tanto, una apelación a Kant, pero no al de la Estética Trascendental, sino al de la Dialéctica Trascendental. En efecto, tal como lo señala Stephan Körner[41], el principio del que parte Hilbert para la reconciliación de las nociones descriptivas con las nociones ideales se encuentra en la Dialéctica Trascendental. En la tercera antinomia de la razón pura, Kant aborda el conflicto entre la *libertad* y la ley natural. Por libertad, Kant entiende la independencia de toda causalidad, la autodeterminación; en cambio, por ley natural entiende el principio según el cual *todo cuanto sucede posee una causa*.

---

[37] Kant denomina *ideas de razón* a las nociones cuyos objetos no pueden ser dados en ninguna experiencia posible. Al respecto, admite la posibilidad de extender el conocimiento mediante la adjunción de nociones ideales a condición de que el sistema amplificado no sea contradictorio. No obstante, advierte que tal extensión no acrecienta el conocimiento teórico y que su función es meramente práctica, punto en el que Hilbert está de acuerdo.

[38] A la matemática que se desarrolla exclusivamente con base en nociones descriptivas Hilbert la llama *matemática finitista*. Se trata de una teoría de naturaleza puramente combinatoria, la cual se ocupa de configuraciones finitas de signos dables en la intuición, En ella, la evidencia descansa en la intuición sensible, y las demostraciones se apoyan en exclusiva en la consideración de los signos, sus combinaciones y sus relaciones mutuas. Por esta razón la matemática finitista no acepta ningún tipo de evidencia abstracta como, por ejemplo, la relacionada con las demostraciones de existencia por reducción al absurdo o, incluso, la noción de *construcción mental* propia del intuicionismo. Al contrario, todas las pruebas consideradas en este dominio deben referirse exclusivamente a las propiedades combinatorias (espacio temporales) de los signos considerados, teniendo como único punto de apoyo la intuición del signo. Se trata, entonces, de una matemática mucho más rigurosa que la matemática intuicionista, de la que sólo es una parte.

[39] [Hilbert, 1925, p. 121].

[40] En otras palabras: para Hilbert, la teoría cantoriana no es conocimiento de nada; más bien, es una extensión de una teoría que sí es conocimiento de algo, aunque ese "algo" pertenezca a una esfera muy reducida. Se trata, como ya lo hemos indicado, de configuraciones finitas de símbolos producibles en el ámbito de la sensibilidad.

[41] Cf. [Körner, 1960, capítulo IV].

El problema de la aparente inconsistencia tiene para Kant una importancia crucial, encarando en él el mayor dilema de su pensamiento. Por una parte, Kant desea dar cuenta de la libre voluntad del hombre, cuyos actos aparecen como resultado de una autolegislación (la ley moral) que se halla por encima de las leyes naturales; por la otra parte, Kant reconoce la importancia de guardar la física de Newton, fundada en la noción de causa, dos tareas en un aparente conflicto.

La solución de Kant consiste en afirmar que la noción de libertad es una idea pura, trascendental, que no contiene nada proveniente de la experiencia y que no puede aplicarse a ella. Por el contrario, la física de Newton es un sistema integrado por nociones aplicables primordialmente a objetos concretos. Según Kant, este último sistema se puede ampliar mediante nociones ideales siempre y cuando la extensión se haga de manera coherente, es decir, de manera que las nociones con que se amplía no entren en conflicto con él. Ésta es, precisamente, la tarea que se impone para solucionar el aparente conflicto: probar que naturaleza y libertad son compatibles, mostrando que ambas alternativas se pueden cumplir simultáneamente y desde un punto de vista distinto en un mismo acontecimiento sin contradecirse.[42]

En clara consonancia con Kant, Hilbert sostiene que la extensión de la matemática finitista mediante nociones ideales sólo está sujeta a que la ampliación sea no contradictoria. De hecho, considera que las pruebas de consistencia son el verdadero fundamento de las teorías matemáticas, sin importar que éstas estén referidas o no a algún tipo de realidad. En el caso específico de la matemática clásica, dicha prueba es imperiosa (estamos hablando de la década 1920-30). Al respecto, Hilbert debe enfrentar el problema de la confiabilidad de los métodos que utilizará en la prueba. Por ejemplo, una prueba de consistencia para la aritmética basada en el axioma de elección no tendría ningún valor epistémico.

La manera en que Hilbert intenta resolver el problema anterior es sumamente ingeniosa. *Grosso modo*, ésta consiste en formalizar la matemática clásica en la teoría de la cuantificación, incluyendo los principios lógicos aceptados, los axiomas de la teoría propiamente dicha y algo más: la enumeración de todas las reglas de inferencia que regirán la demostración en el sistema. En otras palabras, propuso la completa formalización de la teoría, reduciéndola a lo que ahora se llama un *sistema formal*.

Ahora bien, dado que un sistema formal es un sistema de signos, la descripción y el estudio de sus propiedades cae directamente en el dominio de la matemática finitista, donde se le mira como un conjunto de reglas para manipular símbolos desprovistos de todo significado. La prueba de consistencia sería entonces un teorema de la matemática finitista que establecería una imposibilidad: la de derivar con esos axiomas y esas reglas de inferencia una fórmula y su negación (donde por "negación de una fórmula j" lo que se entiende es la fórmula "Ø"a j, la cuál resulta de anteponer el signo "Ø" a j, una operación enteramente sintáctica). En tanto que prueba perteneciente a la aritmética combinatoria, nadie podrá dudar de ella, ni siquiera Brouwer.

La historia de lo sucedido con este programa de fundamentación (denominado *Programa de Hilbert*) es muy interesante y ha tenido importantes consecuencias para la filosofía de las matemáticas. Pasa, obviamente, por los teoremas de incompletud de Gödel, los cuales de alguna manera establecen la imposibilidad de la prueba solicitada. No obstante, aquí nada diremos de estas cuestiones, pues van más allá del tema que nos ocupa.

Para cerrar esta sección queremos añadir dos breves comentarios, uno relativo al apriorismo de Hilbert y otro concerniente a la manera en que este matemático se sirve de la filosofía de Kant.

---

[42] V. CRP, La antinomia de la razón pura, III.

18 de enero 2005 • Volumen 6 Número 1 • ISSN: 1067-6079

1) Para Hilbert, el punto de apoyo de la matemática finitista es la intuición del signo. Por tanto, la idea central de la epistemología kantiana sigue vigente en su filosofía: a saber, que además de la deducción y la experiencia, tenemos una tercer fuente de conocimientos, cierto conocimiento a priori de la realidad. No obstante, Hilbert considera que dicha fuente se limita, en el caso de las matemáticas, a la ya mencionada intuición del signo, único tipo de discernimiento intuitivo que acepta como necesario para la construcción de la aritmética. Por tanto, Hilbert también rechaza el apriorismo kantiano en su forma general.[43]

2) La intervención de Hilbert muestra con toda claridad la manera en que la filosofía de Kant siguió siendo importante para la filosofía de las matemáticas en el siglo veinte. La respuesta no está en su peculiar concepción de las matemáticas, que a la sazón ya había perdido mucha de su fuerza; más bien, su importancia se halla en su epistemología. Inspirado en ella, y en abierta consonancia con la Dialéctica Trascendental, Hilbert abre un espacio para la matemática "ideal" junto a la matemática constructiva, mostrando que en realidad no hay incompatibilidad entre ambas. Este esfuerzo por hacerlas compartir un único territorio es de suma importancia a la luz de los cambios ocurridos en el siglo diecinueve.

## CONCLUSIÓN

Lo que hemos presentado hasta aquí no es sino una pequeñísima parte de los encuentros de Kant con la matemática moderna. La selección del material estuvo determinada no sólo por la relevancia de los temas considerados, sino por nuestras preferencias, siendo muchas las cosas realmente importantes que quedaron fuera.[44]

Para finalizar queremos señalar lo siguiente. Sería injusto reprochar a Kant no haber anticipado los principales descubrimientos lógicos y matemáticos de eras posteriores; más bien, debemos celebrar la profundidad con que supo discernir la práctica lógica y matemática de su tiempo. Sólo leyendo a Kant desde una perspectiva más general, una que trasciende su compromiso con la ciencia newtoniana de su tiempo y su trasfondo euclidiano, hemos podido separar aquellos aspectos de su pensamiento que no perdieron valor para la posteridad de aquellos otros que sí lo hicieron. Ciertamente, nuestro horizonte filosófico tiene su forma actual a raíz del colapso de la filosofía kantiana; no obstante, también es cierto que la más moderna filosofía de las matemáticas tiene como punto de partida la revalorización de sus ideas.

---

[43] En efecto, al dividir las nociones matemáticas en descriptivas e ideales, Hilbert acepta en las matemáticas una región en la que las proposiciones son sintéticas y *a priori*: la matemática finitista, cuyas proposiciones no derivan de la experiencia ni se deducen de ella. El punto de apoyo de esta matemática es la intuición del signo, la cual se halla en nosotros *a priori*, es decir, con anterioridad a toda percepción de los signos y como condición de posibilidad de tales percepciones. Se trata, por decirlo de alguna manera, de una forma de intuición kantiana limitada a configuraciones espaciales discretas y finitas.

[44] Entre otras cosas, nos gustaría haber hablado también de las siguientes cuestiones:

1) La relación existente entre la intuición del espacio y las geometrías no euclidianas, un tema que ha resurgido recientemente;

2) Las investigaciones de Gödel en torno a la teoría de la relatividad, donde descubre que la existencia de un intervalo objetivo de tiempo no es una consecuencia de las la ecuaciones de campo de Einstein. La conclusión es sorprendente: la teoría de la relatividad pareciera confirmar la tesis kantiana según la cual el tiempo no es algo que exista por sí mismo, ni una característica u orden inherente a los objetos, sino una entidad que sólo existe con relación al sujeto. Esto daría la razón a la filosofía idealista en este punto.

3) La relación entre la filosofía de Kant y la fenomenología de Husserl, en la que ésta última se mira como una formulación precisa del núcleo de la primera. Recientes investigaciones en esta dirección han puesto en evidencia la necesidad de reexaminar la cuestión de los juicios sintéticos *a priori*, mostrando que, en cierto sentido, querer aplicar las categorías de "analítico" y "sintético" a todas las proporciones matemáticas no tiene sentido. Esto de suyo cuestiona la manera en que tradicionalmente se ha leído a Kant.

## BIBLIOGRAFÍA

**Aspray, William y Kitcher, Philip, (editores)**
1988 *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minneapolis, Minnesota Studies in the Philosophy of Science.

**Benacerraff, Paul, y Putnam, Hilary, (editores)**
1964 *Philosophy of Mathematics, Seleccted Readings*, Cambridge, Massachusetts, Cambridge University Press, 2ª edición, 1991.

**Brouwer, Luitzen Egbertus Jan,**
1912 «Intuitionism and Formalism», *Bulletin of the American Mathematical Society* 20, 1913. Reimpreso en [Benacerraf y Putnam, 1964], pp. 77-89.
1948 «Conciousness, philosophy and mathematics», en *Benacerraf y Putnam*, 1964, pp. 90-96.

**Dedekind, Richard,**
1888 *Essays on the Theory of Numbers,* New York, Dover Publications, 1963.

**Dummett, Michael,**
1977 *Elements of Intuitionism*, London, Oxford University Press, 1977.
Euclides,
(1992) *Elementos de Geometría I-II*, (versión española de Juan David García Bacca), México, UNAM, 1992.

**Ewald, William, B., (editor)**
1996 *from Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, 2 vols., Oxford, Clarendon Press, 1996.

**Frege, Gottlob,**
1879 *Begriffsschrift*, Halle. [Traducción al español de Hugo Padilla; *Conceptografía*, Instituto de Investigaciones Filosóficas¸ UNAM, 1972].
1884 *Die Grundlagen der Aritmetik*, Breslau [Traducción al español de Hugo Padilla; *Los fundamentos de la aritmética*, Instituto de Investigaciones Filosóficas¸ UNAM, 1972]
1980 *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Chicago, University of Chicago Press, 1980 (Cartas traducidas del alemán al inglés por Hans Kaal, en una edición al cuidado de Gottfried Gabriel et al.).

**Friedman, Michael,**
1985 «*Kant's Theory of Geometry*», en Posy, Carl, J., 1992, pp. 177-220.
1992 *Kant and the Exact Sciences*, Cambridege, Massachusetts, Harvard University Press.

**Heath, Thomas L.,**
1956 *Euclid's Elements*, 3 vols, Nueva York, Dover Publications Inc., 1956.

**Heijenoort, Jean van, (editor)**
1967 *From Frege to Gödel*, Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1967.

**Heyting, Arend,**
1931 «Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik», *Erkenntnis*, vol. 2, pp. 105-115. [tr. al inglés de Paul Benacerraf y Hilary Putnam, «The intuitionist foundation of mathematics», en [Benacerraf y Putnam, 1964] pp. 52-61].
1955 *Les fondements des mathématiques. Intuitionisme, Théorie de la demostration*, París, Gauthier-

18 de enero 2005 • Volumen 6 Número 1 • ISSN: 1067-6079

Villars, 1955.
1956 *Intuitionism, An introduction*, Amsterdam, North-Holland, 1956.
1975 L. E. J. Brouwer *Collected Works 1; Philosophy and Foundations of Mathematics*, Amsterdam, North Holland, 1975.

**Hilbert, David,**
1899 *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig y Berlín, Teubner, 1899. [tr. al inglés de E. J. Townsend con algunas adiciones hechas por Hilbert a la edición francesa de 1899: *Foundations of Geometry*, La Salle, Illinois, Open Court Publishing Co., 1962.]
1917 «Axiomatisches Denken», en Hilbert, 1935, vol. 3, pp. 146-156. [tr. al español de Luis Felipe Segura, «El pensamiento axiomático», en Hilbert, 1993, pp. 23-35.]
1925 «über das Unendliche», *Mathematische Annalen* 95 (1926) pp. 161-190. [tr. al español de Luis Felipe Segura, «Acerca del infinito», en Hilbert, 1993, pp. 83-121.]
1930 «Naturerkennen und Logik», *Die Naturwissenschaften* 18, pp. 953-963. [tr. al inglés de William B. Ewald, «Logic and the Knowledge of Nature», en Ewald, 1996, pp. 1157-1165.]
(1993) *Fundamentos de las matemáticas* (recopilación), Colección MATHEMA, Facultad de Ciencias, UNAM, 1993.

**Kant, Immanuel,**
1787 *Kritik der reinen Vernunft* 2ª ed. [tr. al español de Pedro Rivas, *Crítica de la razón pura,* Madrid, Alfaguara, 1997.]

**Körner, Stephan,**
1960 *The Philosophy of Mathematics*, Londres, Hutchinson University Library. [tr. al español de Carlos Gerhard, *Introducción a la filosofía de la matemática*, México, Siglo XXI editores, 1967.]
1972 *La matemática gödeliana y sus implicaciones filosóficas,* México, Seminario de problemas científicos y filosóficos, Suplementos III/11, UNAM.

**Parsons, Charles,**
1969 «Kant's Philosophy of Arithmetic», en Posy, Carl, J., 1992, pp. 43-79.

**Posy, Carl, J., (editor),**
1992 *Kant's Philosophy of Mathematics, Modern Essays*, Dordrecht/Boston/London, Kluwer Academic Publishers.

**Torres, Carlos,**
1995 «The Philosophy and the Program of Hilbert», *Mexican Studies in the History and Philosophy of Science*, vol. 172, Dordrecht, Kluwer Academic Press, 1995, pp. 151-172.
1999 «Hilbert, Kant y el fundamento de las matemáticas», *Theoria, Revista del Colegio de Filosofía*, Facultad de Filosofía y Letras, UNAM, N° 8-9, diciembre 1999, pp. 111-129.

**van Heijenoort, Jean,**
1967 *From Frege to Gödel, a Source Book in Mathematical Logic*, 1879-1931. Cambridge, Massachusetts, Harvar University Press, 1967.